



1	2		S		N	
---	---	--	---	--	---	--

Diagram illustrating a sequence of elements (1, 2, S, N) grouped by a bracket underneath.

LITERA

CA PRIN MAGIE

Când matematicienii devin magicieni și
iluzioniști

FERNANDO BLASCO

Traducere de Ionela Polixenia Matei

EDITURA LITERA
București

CUPRINS

Capitolul 0. Magicieni, matematicieni și oameni de știință	7
<i>Luco Pocioli și primele jocuri de motemogie</i>	8
Capitolul 1. Numerele, prezicerea și criptografia RSA	13
Ghiciți un număr	is
Proprietăți elementare ale numerelor	20
Bancnotele: magia banului	24
Șirul lui Fibonacci	27
Operații într-un pachet de cărți	33
<i>Henri Decremps, dușmanul iluzioniștilor</i>	34
Capitolul 2. Geometrie și iluzie	41
Minciuni geometrice	41
Anamorfoze și stereoscopii	46
Iluzii optice	52
<i>Martin Gardner</i>	54
Topologie, noduri și frânghii	56
Capitolul 3. Probabilitate în magie	63
Joouri contraintuitive	63
Probabilitate și psihologie	69
Elefanți în Danemarca?	71

Probabilitatea într-un pachet de cărți	74
<i>Perși Dioconis</i>	78
Coincidențe	BO
Go/m <i>Mulcahy</i>	B3
Statistici și magicieni	B4
Capitolul 4. Codificare: știința ascunderii și comunicării secretelor	B7
Coduri în magie	B7
<i>Jean Eugène Robert-Hûudin</i>	B 8
Coduri și minciuni	91
Principiul lui Gilbreath	97
Jocul lui Fitch Cheney	103
Jtaym ond Sm ul/ytin	106
Secvențele lui De Bruijn	107
<i>S Brent Morris</i>	112
Capitolul 5. Matematică, magie și arte înrudite	115
Pariuri de salon	115
Soluții	119
Distracții cu fizica și cu chimia	121
Matematica origami	124
<i>Bob Hummer</i>	125
Flexagonele și caleidociclurile	129
Globoflexia	133
<i>Vi Han</i>	134
ANEXE	137
Lecturi recomandate	139
Glosar	141

Capitolul 0

Magicieni, matematicieni și oameni de știință

Legătura dintre matematică și magie ni se poate părea recentă, dar exista documente care atestă existența ei acum cinci sute de ani. Prima carte în care se vorbește despre un joc de magie cu cărți a fost scrisă de un matematician: Luca Pacioli. El și Leonardo da Vinci, discipolul și prietenul său, au scris un tratat despre ceea ce am putea descrie acum ca fiind matematica recreativă. Este vorba despre *De Viribus Quantitatis* {*Despre puterea numerelor*, 1496-1508). Luca și Leonardo erau amândoi iubitori de magie, divertisment și ghicitori logice. Pentru ei, algebra era ceva magic, surprinzător, care le permitea să rezolve problemele într-un mod sistematic și simplu.

Chiar și astăzi, progresele în matematică par a fi o magie: pare incredibil să putem efectua plăți cu un telefon mobil, care ne permite, de asemenea, să accesăm căsuța noastră de poștă electronică, precum și imensa bază de date a World Wide Web. Ceea ce este și mai incredibil este că, în general, comunicațiile sunt sigure (inclusiv parolele conturilor noastre personale]. În acest sens, reamintim că scriitorul de știință-ficțiune Artbur C. Clarke, un savant în matematică și în fizică, deși este cel mai bine

cunoscut pentru activitatea sa literară, a enunțat trei principii legate de știință și progresul acesteia:

LUCA PACIOLI SI PRIMELE JOCURI DE MATEMAGIE

Luca Pacioli (1445-1517) s-a născut la Sansepolcro, unde își avea magazinul *Piere della Francesca*. Tocmai aici se crede că și-a început cromul cunoașterii. Mai târziu a ajuns la Veneția, unde a studiat matematica cu Domenico Bragacin. Apoi s-a mutat la Roma și a locuit în casa lui Leon Battista Alberti; aceasta a fost și perioada în care a studiat teologia și a aderat la Crcinul Franciscan. A predat matematica la universitățile din Perugia, Zara, Napoli și Roma, înainte de a publica *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionali* în Veneția, care a adunat toate cunoștințele matematice ale vremii și a devenit un text de referință ce bază pentru evoluțiile ulterioare ale disciplinei.

Drumurile lui Pacioli și ale lui Leonardo da Vinci s-au întâlnit la Milano în 1496, an ce marchează începutul prieteniei lor și, de asemenea, al unei colaborări fructuoase. Astfel, Pacioli a început să scrie cartea de geometrie *De divina proportione* cu ajutorul unui ilustrator respectabil: Leonardo însuși. Mai târziu, s-au mutat împreună la Veneția și Florența. În acea perioadă, au adunat ghicitori și jocuri de logică cu care Pacioli a completat, puțin mai târziu, *De Viribus Quantitatis*, cel mai vechi document cunoscut în care este menționat un joc de magie cu cărți. Cartea nu a fost niciodată

1. Atunci când un om de știință eminent, dar în vârstă, susține că ceva este posibil, aproape sigur are dreptate. Când spune că ceva este imposibil, cel mai probabil greșește.

- 2. Singura modalitate pentru a descoperi limitele posibilului este să te aventurezi dincolo, în imposibil.
- 3. Este greu să faci distincție între tehnologiile noi și magie.

În cadrul acestei cărți, al treilea principiu ne interesează în mod special. De fapt, magia a folosit întotdeauna tehnologia rămânând în



Figura 1. De Viribus Quantitatis (facsimil editat de F. Honseil și G.T. Bagni. Aboca

publicată, dar manuscrisul este păstrat la Universitatea din Bologna, chiar acolo unce a rămas ascuns timp de cinci sute de ani, până când Davide Sinmaster, jn matematician expert în matematică recreativă, a găsit o referință la un text într-o altă carte și a început cercetarea acestuia. Se crede că Pacioli și Da Vinci au compus colecția împreună, deoarece multe dintre jocurile cescrise acolo se regăsesc în caietele lui Leonardo.

limitele cunoștințelor științifice: intenția magicienilor este de

a uimi, de aceea au nevoie de idei, obiecte, tehnici și mecanisme necunoscute oamenilor, tipice lumii cercetătorilor.

Iluzioniștii obișnuiesc să spună că 80% din succesul unui joc de magie este determinat de un factor psihologic, iar 20% de o anumită abilitate, de exemplu, un talent pentru matematică, dexteritate manuală, fizică... în fine, așa-numitul „truc”; iată lucrul cu adevărat surprinzător: în spectacol „trucul” contează doar 20%, în timp ce

restul depinde de așteptările spectatorului, deci de modul în care îi vom putea capta atenția și îl vom face să se distreze cu scamatoria folosind stratagemele corespunzătoare. Nu este surprinzător că unii neurologi studiază strategiile folosite de iluzionisti pentru a înșela publicul. În special, savanții sunt interesați de capacitatea magicienilor de a crea situații în care reușesc să devieze percepția. Importanța acestui tip de experimente este comparabilă cu aceea a contraexemplurilor din matematică. Prin urmare, magia este indisolubil legată de știință și nu doar de matematică sau fizică, ci și de disciplinele nou-apărute.

Locurile de logică sunt un antrenament excelent pentru oricine se apropie de lumea magiei, deoarece în timp ce rezolvați nu trebuie să vă faceți griji cu privire la cât de priceput sunteți cu mâinile: jocurile funcționează de la sine (cel puțin la un prim nivel de dificultate) și permit începătorului să se concentreze asupra prezentării jocului: capacitatea de a capta atenția privitorului, de a masca matematica ascunsă în joc și de a se juca cu emoțiile publicului care, în cele din urmă, este scopul final al unui spectacol de magie.

După publicarea cărții lui Pacioli și a lui Da Vinci, au fost scrise numeroase tratate despre știința recreației, ce cuprind jocuri de magie matematică și, mai general, de magie științifică (lichide care își schimbă culoarea, jocuri realizate cu oglinzi sau magneți]. În ciuda acestui fapt, primul care a scris o carte completă despre magia matematică a fost Martin Gardner, care în 1956 a publicat *Ghicitori și jocuri matematice*. Noi, iubitorii de magie matematică, am luat-o aproape toți pe urmele lui Martin Gardner, bazându-ne pe cărțile și articolele sale populare. Acest autor nu a făcut o reală carieră „științifică”, dar a fost mereu interesat de fizică și matematică; nici nu s-a dedicat

profesiei de magie, dar a reușit să inventeze multe jocuri și să le găsească în texte vechi. Cărțile sale reprezintă un punct de referință fundamental în ambele discipline – magie și matematică –, iar intenția acestei cărți este aceea de a-i continua activitatea. Mulți dintre cititori se vor putea

apropia de minunile matematicii printr-o activitate artistică precum magia. Suntem la fel de convinși că mulți oameni sunt incapabili să se distreze cu matematica, deoarece ignoră existența matematicii recreative. Sperăm că prin citirea acestei cărți o va descoperi

Capitolul 1

Numerele, prezicerea și criptografia RSA

Dacă cineva ne întreabă ce este matematica, ne gândim imediat la cifre. Nu luăm în considerare geometria și, cu atât mai puțin, întregul sistem matematic, din care astăzi ar părea ciudat să excludem probabilitățile, statistica și calculul. Științele matematice sunt esențiale în viață, pentru influența directă pe care o au asupra științei și tehnologiei, dar și pentru rolul pe care l-au jucat în artă și – de ce să nu recunoaștem – în lumea divertismentului. Astăzi suntem uimiți de mișcările personajelor din desenele animate: ei bine, animația lor este studiată în detaliu și creată datorită matematicii; unele efecte optice în spectacolele de teatru se bazează pe tehnologii care funcționează grație matematicii și, așa cum am spus, vom vedea că, de mai multă vreme, științele matematice servesc pentru divertisment și, în același timp, pentru a învăța.

Fiecare dintre noi poate fi identificat cu unul sau mai multe numere: de exemplu, cele ale cărții de identitate, ale unui pașaport sau ale telefonului. La școală învățăm numerele și unele dintre proprietățile lor, dar lucrul cel mai important în matematică este să înțelegem cum și de ce funcționează numerele pe care adesea

a trebuit să le memorăm (de exemplu, studiind tabla înmulțirii] sau proprietățile lor. În acest capitol, vom aplica cunoștințele de bază ale aritmeticii pentru a crea iluzii. Pentru a face acest lucru, vom aminti mai întâi câteva concepte.

O chestiune de proprietate

Știm cu toții să adunăm două numere, nu? Și ordinea în care le adunăm nu este importantă (adică $5 + 3 = 3 + 5$). Această proprietate, de natură generală, este cunoscută sub numele de *proprietate comutativă* și ne face viața mult mai ușoară. Să presupunem că știm deja cum să adunăm două numere și acum dorim să adunăm trei. Cum facem? Începem prin a aduna primele două numere și îl adunăm și pe al treilea la rezultat, sau ar fi mai bine să adunăm ultimele două mai întâi și să adunăm primul la sumă? Practic este la fel, deoarece se obține același rezultat. Aceasta se numește *proprietate asociativă* și ne permite să eliminăm parantezele: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$. Acestea fiind spuse, putem aduna deja orice cantitate. Aceste două proprietăți – comutativă și asociativă – sunt valabile și pentru înmulțire. Dacă amestecăm sume și înmulțiri trebuie să vorbim despre o altă proprietate fundamentală, *proprietatea distributivă*, pentru care: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$; adică, înmulțirea unui număr cu o sumă echivalează cu înmulțirea acelui număr cu fiecare dintre adunări, realizând apoi suma produselor.

Pentru a ne realiza magia vom avea nevoie de proprietăți elementare ca acestea și altele, adăugând criterii de divizibilitate și puțină logică și ingeniozitate. Dar să o luăm mai ușor. Uneori vom fi obligați să recurgem la termeni tehnici în detrimentul simplității; de exemplu, atunci când folosim cuvântul „număr” ne referim aproape întotdeauna la

ceea ce se numește tehnic un număr natural (1, 2, 3, 4 ...), chiar dacă nu va fi întotdeauna așa și, uneori, vom avea în vedere numere precum 0,5, i sau v^2 .

Ghiciți un număr

Să ne imaginăm că asistăm la spectacolul unui „matemagician” care caută un voluntar în rândul publicului, Vittorio. În primul rând, magicianul îi cere să se gândească la un număr mai mic de 100 și să îl scrie pe o foaie (fără a fi văzut de nimeni); foaia va fi îndoită și pusă deoparte.

În acest moment, matemagicianul implică alți trei spectatori – Aurora, Bianca și Cecilia – și îi cere lui Vittorio să le arate numărul pe care l-a scris, fără ca restul publicului să-l poată vedea. Apoi, îi cere Aurorei să împartă numărul la 3 și să-i spună restul împărțirii (ea face împărțirea mental și răspunde că restul este 2), Biancăi îi cere să împartă la 5 și, din nou, să-i anunțe restul (egal cu 3), și în cele din urmă îi cere Ceciliei să împartă numărul la care s-a gândit Vittorio la 7 și să-i spună restul (al său este 5).

Așadar, magicianul le cere lor să se gândească la număr, fără să îl spună. Deodată strigă: „Am înțeles! Am găsit numărul. Este 68!”, și îi cere lui Vittorio să ia foaia și să o arate publicului: numărul coincide cu cel ghicit de magician, care primește binemeritele aplauze.

Acest truc, fără nicio modificare, coincide cu cel menționat în cartea *De Viribus Quantitatis* a lui Luca Pacioli. Acum să vedem cum a reușit magicianul să „adune” gândurile voluntarilor.

Cu siguranță a trebuit să muncească din greu sau, cel puțin, a trebuit să facă un calcul foarte repede. De fapt, toți magicienii exersează și, cu puțin antrenament, organizează spectacolul.

O posibilă soluție ar putea fi calcularea tuturor numerelor care îndeplinesc condițiile pe care dorim să le stabilim pentru voluntarii noștri. În cazul Aurorei, numerele mai mici de 100 care după împărțirea la 3 dau restul 2 sunt: 2, 5,

8,11,14... și așa mai departe până la 98 (numărați doar din trei în trei începând de la rest, în acest caz 2). Lista care îndeplinește condițiile Biancăi va fi formată din numerele 3, 8, 13, 18, 23... până la 98 (numărând din cinci în cinci începând cu restul]. Și, în cele din urmă, pentru Cecilia lista va fi alcătuită din 5, 12, 19, 26, 33... până la 96 (numerele care rezultă din numărarea din șapte în șapte începând cu restul].

Odată ce cele trei serii au fost calculate, trebuie să le comparăm pentru a găsi numărul prezent în toate trei. Poate părea o metodă greoaie, care necesită multă memorie. Și, de fapt, trebuie să rezolvăm o problemă și mai mare: suntem siguri că există un număr și doar unul singur care îndeplinește cele trei condiții? Din fericire, da, și o știm datorită unei teoreme pe care studenții de la olimpiada de matematică o folosesc foarte mult: așa-numita *teoremă chineză a resturilor*.

Teorema chineză a resturilor

Presupunem că avem trei numere - m_1, m_2, m_3 - și că fiecare pereche are ca divizor comun doar pe 1. Așadar, dacă luăm alte trei numere - b_1, b_2, b_3 este posibil să găsim un număr n , astfel încât să poată fi exprimat în același timp cu b_i , plus un multiplu al m_i , pentru fiecare $i = 1, 2, 3$.

Să nu ne speriem de rezultat; este o ocazie pentru cititorii mai experimentați și curioși să afle mai multe. În plus față de formula sa precisă, aspectul interesant este că teorema ne oferă o metodă pentru a calcula pur și simplu „magic” numărul la care s-a gândit Vittorio, fără a fi nevoie să recurgem la sisteme lungi și plictisitoare, încercări și verificări nefolositoare.

Mai întâi va trebui să înmulțim resturile comunicate de cele trei colaboratoare cu 70, 21 și 15 (b_1, b_2, b_3 din

teoremă], apoi să le adunăm: $2 \times 70 + 3 \times 21 + 5 \times 15 = 278$.

Rezultatul se va împărți la 105 („modulul” teoremei], iar restul obținut va coincide cu numărul la care s-a gândit Vittorio. în cazul nostru, dacă împărțim 278 la 105 vom obține un rest de 68 ($278 - 2 \times 105$).

Ghicitoare

Putem juca un joc similar cu un alt set de trei numere.

1 *De exemplu, 5, 7 și 9 sunt două câte două prime între ele. În acest caz, trebuie să cerem să ne gândim la un număr între 1 și 315. Important este să existe o teoremă care să susțină jocul, adică, deși nu știm cum să determinăm numărul, teorema ne garantează că împărțirea la 5, 7 și 9 va duce la obținerea unor astfel de resturi. La început, găsirea numărului nu pare deloc ușoară, dar dovada teoremei chineze a resturilor ne oferă și numerele „magice” de care avem nevoie și care în acest caz vor fi respectiv 126, 225 și 280.*

Cine vrea să încerce să ghicească numărul la care m-am gândit? Împărțindu-l la 5 dă restul 1, împărțindu-l la 7 dă restul 3 și împărțindu-l la 9 dă 6.

Iată calculul: $1 \times 126 + 3 \times 225 + 6 \times 280 = 2481$.

Împărțind la 315 și ținând restul deoparte, soluția este numărul la care m-am gândit. Ce număr este?

9LZ :eiin[os

Pentru a obține „numerele magice” pe care le-am folosit, există o procedură standard, deductibilă din dovada rezultatului anterior. Cititorii se pot gândi singuri să ajungă la soluție sau să revizuiască conceptele de bază pe unele texte elementare. Intenția acestei cărți este aceea de a expune doar o parte din proprietățile matematice necesare, lăsându-le pe altele aprofundării libere.

Cifrul lui Cezar

Dincolo de importanța sa istorică, acest truc este surprinzător, deoarece este legat de algoritmi de siguranță informatică de care depindem atât de mult. Chiar și în cele mai vechi timpuri, secretele trebuiau ascunse, adică era necesar să ne asigurăm că au rămas așa și, de-a lungul timpului, mulți matematicieni și-au adus contribuția. Unul dintre cele mai simple sisteme este *cifrul lui Cezar*, numit astfel deoarece Iulius Cezar l-a folosit pentru a comunica cu generalii săi. Cifrul constă în deplasarea unei litere înainte: de exemplu, folosind un cifru cu cheia 4, A se deplasează înainte cu 4 litere, și astfel devine E. B se deplasează în locul lui F, C în locul lui G, și așa mai departe. Acest sistem este foarte ușor de utilizat, dar, din păcate, este la fel de ușor să îl decodăm, și aici matematica a jucat un rol fundamental: în orice limbă este posibil să se facă o analiză a recurenței literelor; astfel, căutând litera care se repetă cel mai frecvent în mesajul codificat, putem presupune că este cea mai utilizată în limba în cauză (de exemplu, pentru limba italiană este E, urmată de A, în timp ce pentru engleză prima este întotdeauna E, urmată de T).

Alți matematicieni au contribuit, de asemenea, la dezvoltarea criptografiei, precum Giambattista Della Porta, Leon Battista Alberti, Blaise de Vigenere și Charles Babbage. Un sistem mai modern, cel al criptografiei RSA (acronim format din inițialele Rivest, Shamir și Adleman), este o cheie publică și este utilizat, de exemplu, în semnătura digitală a unor certificate de siguranță care sunt utilizate în timpul navigării pe internet. Cu acest sistem, fiecare utilizator are două chei de acces: cheia sa publică, pe care o poate folosi oricine dorește să îi trimită un mesaj criptat și cheia sa privată, adică cea pe care o va folosi pentru a decodifica mesajele primite. Chiar dacă nu este exact același lucru, putem face o analogie cu o cutie poștală în

care sunt lăsate mesajele destinate unei persoane (cheia publică); toată lumea știe cum funcționează sistemul, dar numai proprietarul casetei are cheia de deschidere (cheia privată)].

Sistemul se bazează pe dificultatea de a descompune numerele în factori primi; pentru a vedea dacă funcționează putem folosi teorema chineză a resturilor, aceeași care ne-a fost utilă pentru a crea un joc de magie frumos. Să ne gândim la două numere prime mici; de exemplu, 5 și 7. Cu acestea vom face două operații simple; una este să le înmulțim și vom obține 35; cealaltă constă în scăderea lui 1 din fiecare dintre ele, deci înmulțim numerele rămase și adunăm 1 la acest produs, obținând: $(5 - 1) \times (7 - 1) + 1 = 25$. Dacă luăm orice număr cuprins între 0 și 34 (maximul este primul dintre numere), îl ridicăm la puterea 25 (al doilea număr pe care l-am obținut) și îl împărțim la 35, vom rămâne cu numărul de plecare. Ești surprins? Ei bine, acest lucru se întâmplă datorită teoremei chineze.

Să vedem un exemplu: $6^{25} = 28\ 430\ 288\ 029\ 929\ 701\ 376$, dacă avem răbdare să împărțim acest număr la 35 vom vedea că restul său este, de fapt, 6. Criptarea RSA funcționează mai mult sau mai puțin astfel: dăm numărul 25 ca fiind cheie publică, iar expeditorul care dorește să ne trimită un mesaj (în exemplul pe care dorim să-l transmitem, numărul 6) trebuie să ridicăm mesajul la 25. Cel care „călătorește” este numărul mare 28 430 288 029 929 701 376, dar nimeni nu știe (cu excepția noastră, care știm cheia privată: 35) că împărțind acest număr la 35 se obține mesajul original. Plecând de la numere prime mari, în loc să alegem 5 și 7, nu vom obține 25, ci numere mult mai mari, prin urmare este foarte dificil să deducem cheia privată prin intermediul cheii publice. Aici descompunerea numerelor în factori joacă un rol fundamental: dacă facem procesul

invers, scăzând 1 din 25, rămânem cu 24, care poate fi descompus în factori precum 6×4 , 12×2 sau 8×3 . Cu aceste trei posibilități, perechile de numere utilizate ar fi 7 și 5, 13 și 3 sau 9 și 4. Ultima posibilitate trebuie eliminată deoarece nu sunt numere prime, dar, chiar și așa, nu ajungem să deducem că este vorba chiar de 7 și 5, iar cheia privată este 35. Cu numere mari, posibilitățile cresc, în plus, descompunerea în factori devine mai complicată. Din fericire, deducerea cheii private este dificilă, astfel încât datele noastre pot fi în siguranță.

Proprietățile elementare ale numerelor

Putem simplifica jocurile de magie care funcționează datorită proprietăților de bază ale numerelor. Dacă cineva începe să se gândească de ce „trucul funcționează bine”, va constata că, la urma urmei, este destul de evident că se întâmplă acest lucru. Dar, în realitate, pentru mintea noastră nu există jocuri evidente: avem nevoie de pix și hârtie pentru a le diseca, iar acest lucru se întâmplă deoarece avem puțină intuiție pentru numere.

Aceste jocuri de manipulare algebrică au legătură cu proprietățile elementare ale sistemului nostru numeric; în ele apar: proprietatea comutativă (așa cum am văzut deja, ordinea factorilor nu schimbă rezultatul), proprietatea asociativă (adunarea a trei numere este același lucru cu adunarea primelor două și apoi adunarea ultimului număr la rezultat, sau începând de la suma ultimelor două și apoi adunându-1 pe primul) și proprietatea distributivă (cea care ne permite să scoatem parantezele sau pentru a găsi numitorul comun). La aceste proprietăți trebuie să adăugăm faptul că sistemul nostru de numerotare este pozițional: fiecare cifră are o valoare diferită în funcție de poziția pe

care o ocupă: știm cu toții că 123 nu este egal cu 321, deși cifrele utilizate sunt aceleași în ambele cazuri.

În copilărie, toți am făcut ghicitori, în care ni se cerea să ne gândim la un număr care să fie supus apoi unei serii de transformări. Unii dintre noi au fost fascinați, mai ales de descrierea mecanismului pe care s-a bazat jocul; pentru alții, totuși, aceste jocuri au fost dificile și din motive opuse: lucrul incredibil a fost modul în care a fost posibil să „ghicim” ceva, după ce am făcut un calcul lung cu multe operații diferite.

Cu acest experiment, magicianul, exploatând proprietățile elementare ale numerelor, este capabil să spună care este vârsta interlocutorului său dacă acesta urmează corect o serie de calcule: mai întâi îl întreabă care este ziua lui preferată din săptămână, apoi să atribuie 1 lui luni, 2 lui marți și așa mai departe până la 7 pentru duminică; apoi îi cere să înmulțească acest număr cu 50 și, după ce a făcut calculul, va trebui să adauge 44 la produs și să înmulțească rezultatul sumei cu 200; ulterior, va adăuga ultimele două cifre ale anului curent; așadar, va trebui să adauge 100 la acest număr, dar dacă nu a împlinit încă ani, în loc de 100 va aduna 99; în cele din urmă, anul său de naștere este scăzut din această cifră.

Acum magicianul ia în considerare rezultatul: prima cifră va corespunde cu ziua săptămânii preferată de voluntar. Prin scăderea anului curent, ultimele două cifre ale numărului rezultat vor indica vârsta sa.

Să luăm un exemplu: Stephen Hawking s-a născut joi, 8 ianuarie 1942. Ca dată curentă, să presupunem aprilie 2016, deci ziua de naștere a lui Hawking pentru acest an, a trecut deja. De asemenea, vom presupune și că ziua lui preferată este joi (aceasta este evident o ipoteză]. Făcând calculele descrise mai sus, obținem următoarele:

4 (zi preferată]

$$\begin{aligned}
4 \times 50 &= 200 \\
200 + 44 &= 244 \\
244 \times 200 &= 48800 \\
48800 + 16 &= 48816 \\
48816 + 100 &= 48916 \\
48916 - 1942 &= 46974
\end{aligned}$$

În rezultat vedem că 4 este prima cifră, dacă se alege joi, iar 74, ultimele două, sunt numerele care indică vârsta personajului nostru.

Urmărind indiciile ascunse în calculele pe care le-am făcut, putem înțelege cu ușurință de ce acest joc funcționează. Trebuie doar să ne amintim un pic de algebră și proprietățile elementare ale numerelor, despre care am vorbit mai devreme. De asemenea, este important să ținem cont de faptul că, la un moment dat, înmulțim cu 50 și apoi cu 200; acest lucru este echivalent cu înmulțirea cu 10 000, ceea ce este același lucru cu a spune că ducem numărul inițial în poziția zecilor de mii. Deoarece miile depășesc întotdeauna anul curent, zecile de mii vor rămâne neafectate la scădere. Pentru aceasta putem cunoaște ziua preferată a interlocutorului nostru. Și calculul vârstei este evident: de fapt, scădem anul nașterii persoanei dintr-o dată legată de anul curent. Astfel, calcularea vârstei vine în consecință.

Trucuri cu pachetele de cărți

Pentru a-și face următorul număr, magicianul nostru alege cinci persoane din public: Anna, Benedetto, Chiara, Davide, Eva. Împarte patru cărți fiecăruia dintre ei. Imediat după aceea, ia o foaie de hârtie, scrie un număr pe ea (pe care nu îl arată) și își închide predicția într-un plic sigilat. Acum totul

este pregătit pentru a face magie.

Fiecare dintre colaboratori va alege una dintre cele patru cărți din pachetul său pentru a le da magicianului, iar acesta din urmă va începe să ia la cunoștință valorile în spatele unei table, una după alta. Adică, dacă Anna îi dă un trei, magicianul va scrie 3 pe tablă, iar în dreapta valoarea cărții lui Benedetto (un cinci], după aceea cea a Chiarei (un doi], cea a lui David (un alt trei] și în cele din urmă cartea Evei (un patru], cu care va forma un număr format din cinci cifre (35234]. Magicianul nu poate ști ce număr va apărea, presupunând că fiecare persoană i-a dat o carte la întâmplare. Începe runda din nou de la prima voluntară, Anna, și cere din nou fiecăruia câte o carte, formând un alt număr din cinci cifre pe care îl notează mai jos. Mai cere cărțile încă de două ori și până la final va fi scris pe tablă patru numere de cinci cifre. După aceea, o roagă pe Anna să facă suma tuturor acestor numere mari, fără a greși. După calcularea rezultatului, magicianul îi cere lui Benedetto să ia plicul și să îl deschidă, arătându-1 aproape de suma totală. Cele două numere coincid. Încă o dată, spectatorii rămân cu gura deschisă și începe un vuiet de aplauze.

Acest joc este foarte simplu, dar are nevoie de o pregătire și o prezentare care să ascundă ceva ce poate ați ghicit deja și anume: cărțile din pachet sunt plasate într-o anumită ordine încă de la început. Da, este o înșelăciune și, în funcție de context, trebuie mascată. Dar spectacolul de magie matematică, indiferent dacă are scopuri didactice sau de popularizare, nu ne îngrijorează atât de mult. În plus, pachetul trebuie să conțină doar cărți cu valori de la 0 la 9. Dacă pachetul este napoletan, dintre cele 40 de cărți putem decide valoarea fiecăruia, 8 pentru damă, 9 pentru juet și 0 pentru popă. Dacă folosim un pachet de 48, presupunem că fiecare carte are valoarea sa normală și dăm fețelor valoarea 0. Dacă, pe de altă parte, folosim un pachet de

poker de 52 de cărți (după eliminarea jokerilor], putem face diferite lucruri: de exemplu, eliminăm câteva cărți pentru a nu rămâne doar cu valori de la 1 la 9 plus fețe care corespund lui 0. Odată ce toate acestea sunt făcute, amestecăm pachetul. Să presupunem ca la început secvența de 20 de cărți este 3, 5, 2, 3, 4. 1, 0, 6, 0, 8,1, 5, 9. 7, 2, 4, 4. 7, 8, 9. Luăm cărțile în grupuri de cinci și scriem numerele pe care le vedem:

35 234
10 608
15 972
44 789

Le adunăm și obținem 106603 ca rezultat. Acesta este numărul pe care trebuie să-l scriem ca predicție. Preliminariile sunt la locul lor, dar poziția cărților trebuie să coincidă cu secvența originală, astfel încât, prin distribuire, Anna să poată primi pachetul cu cărțile {3.1,1,4}, Benedetto (5.0.5,4}, Chiara {2,6,9.7}, Davide {3,0,7,8}, iar Eva {4.8,2,9) (aceasta este secvența obținută citind de sus în jos, pe coloane, tabelul de numere pe care magicianul l-a pregătit]. Acești cinci voluntari îi vor da magicianului cărțile lor în ordinea pe care o

decid, dar, fiind atenți la ordinea în care scriem numerele, Armei îi vor reveni întotdeauna zecile de mii, lui Benedetto miile, Chiarei sutele, lui Davide zecile, iar Evei unitățile. Valoarea sumei fiecărui membru al grupului va fi întotdeauna aceeași, indiferent de ordinea în care sunt returnate cărțile, așadar jocul este făcut. Proprietatea comutativă care verifică suma joacă în favoarea noastră.

Bancnotele: magia banului

Banii sunt întotdeauna foarte atrăgători. Dacă cititorii au asistat la un spectacol de magie, probabil că l-au văzut pe iluzionist efectuând câteva trucuri cu bancnote, de exemplu, schimbând valoarea sau, probabil, făcându-le să dispară și apoi să le facă să reapară undeva. Alteori, magicienii fac jocuri folosind monede. De ce? în general, pentru jocurile de magie este întotdeauna cel mai bine să se utilizeze obiecte familiare, pe care le folosim în fiecare zi. Aproape toată lumea are câteva monede sau bancnote în portofel cu care să improvizeze un joc (5 euro sunt suficienți, nu sunt necesare bancnote mai mari). în plus, pentru public sunt obiecte care au o valoare; este normal să fii atent la lucruri precum sănătatea, banii și dragostea. Și, dacă putem include în jocul de matematică aspecte care implică emoțional audiența, este și mai bine: efectul se va amplifica și cei care participă cu noi își vor aminti și mai bine.

Aproape am ajuns. Vom avea nevoie de bancnote euro. Atenție, pentru că există două tipuri de bancnote: cele originale, emise în 2002, și cele noi, dintre care cea mai mică avea o valoare de 5 euro, emisă în 2013, urmată de celelalte bancnote. Bancnotele „vechi” aveau un număr de serie format dintr-o literă urmată de unsprezece cifre. Cele

„noi” încep cu două litere urmate de zece cifre. Numărul de serie este important pentru a evita falsurile, dar are caracteristici pe care le vom vedea mai târziu.

Matemagicianul nostru alege un voluntar din public, Francesco. Magicianul îl întreabă dacă are vreo bancnotă în buzunar și Francesco îi dă una nouă de 10 euro. Așa ca îi cere să identifice numărul de serie – un rând de 12 caractere care începe cu două litere – pentru că vrea sa-și demonstreze abilitățile de memorie. Francesco îi dă bancnota, magicianul se uita la el o clipă și spune: „Gata! Am reținut! Vrei să-ți dovedesc asta?” Francesco accepta, iar magicianul îi cere să-i spună încet, unul după altul, caracterele numărului de serie, inclusiv literele, dar sărind unul dintre numere, pe oricare vrea el. Magicianul va face astfel încât să și-l amintească. De asemenea, îl roagă, în locul numărului, să scoată un sunet, un fluierat, o batere din palme sau orice îi place. Francesco începe: VA324 J³ 36816 9. Iar magicianul este pe cale să spună: „Ei bine, îmi amintesc: numărul pe care nu mi bai spus este 5”.

Cum a făcut sa-și amintească asta? în realitate nu este prea dificil, dar trebuie să exersezi puțin. Primul lucru fundamental de făcut este să transformați literele în cifre. O vom face după această logica:

A-2, B-3, C-4, D-5, E-6, F-7, G-8, H-9, HO, J-11, K-12, L-13, M-14,
N-15, O-16, P-17, Q-18, R-19, S-20, T-21, U 22, V-23, W-24, X-25,
Y-26, Z-27.

De fapt, nu trebuie să folosim numere atât de mari, deci vom lucra cu numere cuprinse între 0 și 9. De fiecare dată când avem un număr de două cifre, va trebui să le adunăm. Prin urmare, litera V care a apărut pe bancnota pe care Francesco ne-a lăsat-o va corespunde unui cinci. Ținând minte acest lucru, numărul de serie al bancnotei devine

5 2 3 2 4 J³ 368 169

Acum magia sau trucul este că acest număr este întotdeauna un multiplu de 9, deci puteți demonstra cu ușurință că, de fapt, cifra omisă a fost un 5.

Astfel spus, pare simplu, dar nu este: să încercăm să găsim valori diferite pentru și să calculăm cu care dintre ele se formează un număr de 12 cifre divizibil cu 9. Toate în câteva secunde! Din fericire pentru noi, ne confruntăm cu un exemplu în care aritmetica modulară ne vine în întâmpinare. Deși acest termen poate părea neobișnuit, de fapt am întâlnit deja un tip de calcule de acest fel, la începutul capitolului, când am enunțat teorema chineză a resturilor spunând că este folosit în sistemele de siguranță informatică.

Dar putem da exemple mult mai la îndemâna noastră, cum ar fi un ceas cu ace care funcționează cu modulul aritmetic 12: nu face diferența între orele 6 și 18,6 este echivalent cu 18. Pentru a măsura perioade mai lungi, cum ar fi săptămânile, lucrăm cu modulul aritmetic 7: cinci zile după joi este marți. Acest lucru se poate face prin asocierea numărului 4 cu joi, adunându-l cu 6, împărțindu-l la 7 și luând restul, care este 2, adică marți.

Lucrul cu modulul aritmetic 9 este la fel de ușor, deoarece pentru a obține restul împărțind la 9 trebuie pur și simplu să adunăm cifrele numărului original. Deci trebuie doar să găsim ce valoare a lui J^3 face ca suma tuturor cifrelor să fie egală cu 9:

$$\begin{aligned} 5+2+3+2+4+3+6+8+1+6+9 &= 9 - J^3 \\ 49 &\rightarrow 4 + 9 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4 \\ 4 &= 9 - J^3 \end{aligned}$$

Pentru a trece de la teorie la practică, încercați să ghiciți la ce cifră mă gândesc în acest număr de serie:

S466 7 3 1 J³ 9 5 0 2

La ce număr mă gândesc? 9 sau 0? Pare o mare problemă: lucrul cu modulul aritmetic 9, în care numerele 9 și 0 coincid. Din acest motiv, făcând un joc cu bancnota, nu am putea distinge dacă colaboratorul nostru alege un 9 sau un 0. Putem ghici sau îi putem cere direct colaboratorului nostru ca cifra care este omisă să nu fie 0.

Prin transformarea literelor în cifre, numărul de serie este întotdeauna un multiplu de 9. Cum așa? Nu există niciun motiv, dar cineva a decis acest lucru la Banca Centrală Europeană și suntem buni la acest joc magic. Este posibil ca managerul să fi luat în considerare alte reguli, așa că este întotdeauna bine să ai un cod disponibil pentru a înțelege dacă se fac greșeli, adică un mecanism capabil să ne spună dacă greșim în a recunoaște o bancnotă sau în a distinge o bancnotă de alta.

Este același principiu care apare în calculul codului de control (*check digit*) pentru conturile bancare, prezent astăzi și în calculul codului internațional de cont (IBAN). Pentru a calcula codul de control, împărțiți la 11, iar pentru a calcula primele două cifre ale IBAN, împărțiți la 97, ținând deoparte restul împărțirii.

Șirul lui Fibonacci

Ei bine, o altă carte care vorbește despre șirul lui Fibonacci, dar iepurele matematic care iese din cilindru îi datorează foarte mult lui Leonardo din Pisa, fiul lui Guglielmo Bonacci, care a devenit celebru pentru că a pus o problemă legată de numărul de perechi de iepuri, presupunând că s-au născut în anumite condiții. Iepurii s-au născut și, aparent, păreau să provină dintr-un loc în care acest șir era valabil. O găsim peste tot, chiar și în literatură, datorită lui Dan Brown și

romanului său *Codul lui Da Vinci*. Principala lucrare a lui Fibonacci este *Liber Abaci* (1202), prin care a introdus sistemul de numerotare indo-arabă în Europa. Posibilitatea de a face calcule cu ușurință utilizând cifrele pe care le folosim și astăzi probabil că a părut într-adevăr

Începutul lunii 1	Se naște o pereche de iepuri (perechea A)	Iperecheîn total
Final luna 1	Perechea A împlinește o lună. Se împerechează perechea A.	$1 + 0 = 1$ pereche în total
Final luna 2	Perechea A naște perechea B. Se împerechează din nou perechea A.	$1 + 1 = 2$ perechi în total
Final luna 3	Perechea A naște perechea C. Perechea B împlinește o lună. Se împerechează perechile A și B.	$2 + 1 = 3$ perechi în total
Final luna 4	Perechea A și B nasc perechile D și E. Perechea C împlinește o lună. Se împerechează perechile A, B și C.	$3 + 2 = 5$ perechi în total
Final luna 5	A, B și C nasc F, G și H. D și E împlinesc o lună. Se împerechează A, B, C, D și E.	$5 + 3 = 8$ perechi în total

Tabelu¹1. Șirul lui Fibonacci aplicat problemei creșterii iepuri or.

o magie. Dacă ne gândim că în Occident folosim acest sistem doar de opt secole, totul va părea și mai surprinzător. Totuși, dacă, în ciuda succesului lui Dan Brown și al lui Tom Hanks (actorul principal al filmului bazat pe carte), cineva nu ar cunoaște încă șirul lui Fibonacci, ne putem aminti că este un șir numeric ce începe cu doi și de 1 în care fiecare termen este suma celor doi anteriori. Prin urmare, primii termeni ai șirului sunt:

1
1

2 (suma celor doi anteriori: $1 + 1$)
3 (suma celor doi anteriori: $1 + 2$)
5 (suma celor doi anteriori: $2 + 3$)
8 (suma celor doi anteriori: $3 + 5$)
13 (suma celor doi anteriori: $5 + 8$)
cărora le urmează: 21, 34, 55, 89...

Lucrul cu șiruri ne amintește de câteva teste psihologice de aptitudini. Uneori vi se cere să „ghiciți” care este următorul termen, adică să completați un șir. Șirul lui Fibonacci este caracterizat *de recurență* (definim un termen în funcție de cei anteriori), dar este dificil de calculat termenul său general (o formulă care dă un anumit termen al șirului numai în funcție de locul pe care îl ocupă și nu în funcție de alți termeni deja cunoscuți).

Șirul lui Fibonacci include numărul de aur. În acest număr s-a căutat în mod repetat o legătură cu proporțiile și cu frumusețea. S-a spus chiar – și am crezut și eu – că dimensiunile Partenonului din Atena corespund cu cele ale unui dreptunghi de aur, dar nu este așa; nici măcar forma fosilei *Nautilus* nu este o adevărată spirală de aur. S-au spus multe lucruri despre acest număr care, în realitate, nu sunt adevărate. „Puterile” numărului de aur, mai mult decât pentru iluzio- niști, ar putea fi mai interesante pentru elevii școlii Harry Potter și pentru fanii pseudoștiinței. Deseori în societate se impune un mod de a gândi „magic” la lucruri și riscăm să facem afirmații greșite. Personal, mi s-a întâmplat în cazul proporțiilor *Nautilus*: am crezut că respectă forma descrisă fără să fi măsurat vreodată una, ceea ce a făcut în schimb Nelo Maestre, autorul blogului *Divermates*, subliniind că a fost o eroare larg răspândită. Dovedirea adevărului a ceea ce se spune este una dintre pietrele de temelie a științei. Acolo am greșit.

O altă greșeală obișnuită cu privire la secțiunea de aur, așa cum am spus mai înainte, se referă la Partenon: nu respectă dimensiunile acestei secțiuni și nici grecii nu ne-au spus vreodată despre avantajele asociate cu un astfel de număr. De fapt, primul care a folosit expresia „secțiunea de aur” a fost Martin Ohm (fratele lui George Simon Ohm, părintele legii fizice care îi poartă numele). Și mai înainte de aceasta, Luca Pacioli (din nou el) dedicase un întreg tratat acestei probleme folosind expresia „divina proporție”.

Să ne întoarcem la matematicianul nostru. Invită un alt spectator să iasă în față, iar Greta, încurajată de aplauze, urcă pe scenă cu hotărâre în timp ce iluzionistul îi cere să se gândească la un număr de la 1 la 143. Apoi îi arată cele zece tabele și îi cere să spună dacă numărul la care s-a gândit apare sau nu. Greta răspunde că numărul ei este prezent în tabelele 7 și 10. Apoi magicianul se concentrează și afirmă că numărul gândit de fată este 110. Greta confirmă acest lucru și, uimită, se întoarce în sală însoțită de aplauze.

Tabelele pe care magicianul le arată Gretei conțin următoarele numere:

Tabelul 1: 1 4 6 9 12 14 17 19 22 25 27 30 33 35 38 40 43 46
48 51 53 56 59 61 64 67 69 72 74 77 80 82 85 88 90 93 95 98
101 103 106 108 111 114 116 119 122 124 127 129 132 135
137 140 142

Tabelul 2: 2 7 10 15 20 23 28 31 36 41 44 49 54 57 62 65 70 75
78 83 86 91 96 99 104 109 112 117 120 125 130 133 138 143

Tabelul 3: 3 4 11 12 16 17 24 25 32 33 37 38 45 46 50 51 58 59
66 67 71 72 79 80 87 88 92 93 100 101 105 106 113 114 121
122 126 127 134 135 139 140

Tabelul 4: 5 6 7 18 19 20 26 27 28 39 40 41 52 53 54 60 61 62
73 74 75 81 82 83 94 95 96 107 108 109 115 116 117 128 129
130 141 142 143

Tabelul 5: 8 9 10 11 12 29 30 31 32 33 42 43 44 45 46 63 64 65
66 67 84 85 86 87 88 97 98 99 100 101 118 119 120 121 122
131 132 133 134 135

Tabelul 6: 13 14 15 16 17 18 19 20 47 48 49 50 51 52 53 54 68
69 70 71 72 73 74 75 102 103 104 105 106 107 108 109 136
137 138 139 140 141 142 143

Tabelul 7: 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 76 77 78 79
80 81 82 83 84 85 86 87 88 110 111 112 113 114 115 116 117
118 119 120 121 122

Tabelul 8: 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
51 52 53 54 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133
134 135 136 137 138 139 140 141 142 143

Tabelul 9: 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71
72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88

Tabelul 10: 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103
104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117
118
119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132
133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143

Jocul se bazează pe una dintre numeroasele proprietăți ale
șirului lui Fibonacci, Teorema lui Zeckendorf afirmă că:

„Fiecare număr întreg pozitiv este reprezentabil în mod unic ca sumă a unuia sau a mai multor numere distincte Fibonacci în așa fel încât suma să nu includă două numere consecutive Fibonacci*

Pentru a ghici numărul gândit de Greta, trebuie doar să adunați primele numere din fiecare dintre tabelele pe care ni le arată.

Observăm ca numerele aflate pe prima poziție a fiecărui tabel sunt întotdeauna numere Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 și 89. Avantajul de a avea teoreme generale exprimabile în termeni matematici este că susțin ca ceva este posibil în acest caz. Teorema anterioară ne permite să exprimăm cu totală siguranță fiecare număr ca fiind suma unor termeni neconsecutivi ai șirului lui Fibonacci. De exemplu, 25 poate fi scris ca $1 + 3 + 21$, care sunt termeni al șirului. Din moment ce acestea sunt cele trei numere în care este descompus, trebuie să scriem 25 pe tabelul care începe cu numerele 1, 3 și 21. În mod similar, $80 = 1 + 3 + 21 + 55$, deci va apărea în tabelele 1, 3, 7 și 9. Dacă procedăm în același mod pentru fiecare număr, vom putea completa toate tabelele. Am dat deja soluția, dar dacă doriți, puteți repeta procedura de la zero și să aveți o dovadă în plus.

Acest rezultat pare o magie și, de asemenea, ceea ce citim în revistele specializate care tratează șirul lui Fibonacci. Deși am dat anterior câteva exemple în care nu apare acest șir (sau secțiunea de aur asociată acestuia), există multe altele în care îl putem găsi: de exemplu, în dimensiunile solidelor platonice sau în modelele de acoperire Penrose. Chiar dacă nu trebuie neapărat să-l căutăm peste tot: este bine acolo unde este.

Poate că cititorii sunt familiarizați cu un joc similar, în care în fiecare tabel, primele numere sunt puteri ale lui 2. Deoarece vom relua acest joc mai târziu, în continuare sunt prezentate doar tabelele care vor fi utilizate în cea mai simplă versiune, adică

cazul în care spectatorul alege un număr cuprins între 1 și 63:

Tabelul 1: 1, 3, 5, 7, 9,11,13,15,17,19, 21, 23,25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41,43,45,47,49,51, 53, 55, 57, 59,61, 63

Tabelul 2: 2, 3, 6, 7,10,11,14,15,18,19, 22, 23,26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39,42,43,46,47,50, 51, 54, 55, 58, 59, 62, 63

Tabelul 3: 4, 5, 6, 7,12,13,14,15, 20,21, 22, 23,28, 29, 30, 31, 36, 37, 38, 39,44,45,46,47,52, 53, 54, 55, 60,61, 62, 63

*Tabelul 4:*8,9,10,11,12,13,14,15, 24,25, 26, 27,28, 29,30, 31, 40,41,42, 43,44,45,46,47,56, 57, 58, 59, 60,61, 62, 63

Tabelul 5: 16, 17,18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27,28, 29,30, 31,48,49, 50, 51, 52,53, 54,55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63

Tabelul 6: 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63

Acest joc este mai ușor, deoarece Greta trebuie să verifice mai puține tabele. Și cel mai amuzant lucru din cele explicate mai sus, cu numerele Fibonacci, este că, pentru cei care cunosc deja jocul abia prezentat, la începutul fiecărui tabel numerele par diferite de obicei.

În acest caz, jocul funcționează, deoarece toate numerele naturale pot fi scrise ca sumă de puteri ale lui 2, respectiv baza sistemului de numerotare binar. Nu mergem mai departe, dat fiind că este un joc foarte cunoscut și menționat aproape peste tot. Mai târziu, vorbind despre coduri, vom

vedea câteva variante.

Operații într-un pachet de cărți

încheiem această combinație despre numere cu un joc care apare în *La magie blanche dévoilée*, de Henri Decremps. Este un joc în care secretul se reduce la operații matematice, dar care reușește să dea rezultate destul de surprinzătoare. Varianta lui Decremps prevede că, în timpul numărului, magicianul poate părăsi camera dacă dorește. Deci, nu mai rămâne decât să obții un pachet de cărți și să urmezi instrucțiunile magicianului (de data aceasta scrise). Finalul surpriză este garantat.

Folosiți un pachet de cărți de poker, cu 52 de cărți (jokerii sunt excluși). Pentru simplitate, vom considera că dama (Q) are valoarea 10. Amestecați bine pachetul, tăind cât de des doriți și încercând să țineți minte valoarea primei cărți din pachet. O întoarceți pe masă cu fața în jos și, începând să numărați de la valoarea ei, veți adăuga cărți până ajungeți la 13. De exemplu, dacă cartea este un 7, o puneți pe masă cu fața în jos și începeți să adăugați numărând 8,9,10,11, 12 și 13: veți avea apoi un pachetel cu șapte cărți. Acum luați cartea care a rămas deasupra celui mai mare pachet (cel al cărților care nu

HENRI DECREMPS, DUȘMANUL ILUZIONIȘTI LOR

Henri Decremps (1746-' 826) a fost jn matematician, jurist și diplomat care a scris mai multe cărți în care a expus trucurile rivalului său iluzionist, Giuseppe Merci, alias Gioseph Pinetti. În timp ce Decremps nu s-a dedicat profesional iluzionismului, dimpotrivă, Pinetti a pretins că este fizician și matematician, ceși, în realitate, misiunea lui era să acționeze ca magician în cluburi și la petreceri.

La rânclul său, Decremps a câștigat bani din cărțile și lecțiile sale. În *La magie blanche dévoilé* el explică repertoriul lui Pinetti, iar acest lucru a dat naștere unei profunde cușmării între cei doi. În spectacolele sale, Pinetti l-a ridiculizat pe Decremps, iar acesta a ripostat prin publicarea unei alte cărți, în care a dezvăluit metocelc folosite de magician în noul repertoriu.

După ce secretele sale au fost cezvăluite, Pinetti a părăsit Franța pentru a ajunge în Anglia, dar a avut ghinionul de a ajunge cin nou la Decremps, care fusese repartizat la ambasada franceză cin Londra; această coincidență l-a ceterminat pe Pinetti să se mute în Rusia, unce a început să facă demonstrații spectaculoase care nu au avut succes și l-au dus la închisoare. Nemulțumit ce primele cărți, Decremps a continuat să publice alte texte în care a dezvăluit secretele folosite ce iluzioniști și. în special, de Pinetti. Cărțile lui Decremps au fost, de asemenea, publicate în limba engleză, bucurându-se ce un cestul succes la acea vreme. Pe lângă cărțile în care a cezvăluit trucurile șarlatanilor și înșelătorilor, a scris cărți științifice precum *La science sans-culotisée. Premier essai sur les moyens de faciliter l'étude de l'astronomie et d'opérer une révolution dans l'enseignement* (1794) și *Diagrammes chimiques* sau *Recueil de 360 figures qui expliquent succinctement les expériences par l'indication des agents et des produits à coté de l'appareil, et qui rendent sensible la théorie des phénomènes* ('822).

au fost încă distribuite) și verificați valoarea acesteia (de exemplu, să ne imaginăm că este vorba despre un 2), apoi așezați-o cu fața în jos pe masă și începeți din nou să faceți un pachet de cărți: continuați să adăugați până ajungeți la 13 (3, 4..., 13; în acest caz, în al doilea pachetel vom avea douăsprezece cărți). Luați prima carte dintre cele rămase de împărțit, uitați-vă la valoarea acesteia, întoarceți-o și faceți un al treilea pachet (continuați până la 13; dacă iese un 8, se dau cinci cărți pe primul pachetel).

Continuați mereu să vă uitați la o carte, ținând minte valoarea și adăugând peste ea atâtea cărți până ajungeți la

13: la final nu vor mai fi cărți pentru a face un pachet de 13. De exemplu, să presupunem că ați completat alte trei pachete, în care cărțile cu valorile cele mai mici sunt 9, 2 și Q (am spus că dama valorează 10). Următoarea carte din pachet este un 7, dar rămân doar șase, deci nu putem face un pachet de 13. Prin urmare, lăsăm pe masă ultimele șase cărți.

Odată ce acest lucru este făcut, chemăm magicianul, care intră în cameră. El întreabă câte cărți au rămas și spune: „întoarceți pachetele pe care le-ați făcut. Suma cărților care rămân vizibile este 38”. După ce ați urmat instrucțiunile magicianului, se verifică faptul că, într-adevăr, suma coincide.

Este surprinzător faptul că acest lucru se întâmplă, dar dacă facem calculele, vom înțelege de ce. Este păcat să dai explicația imediat, deoarece face ca magia și iluzia pe care le-am creat să dispară. După cum povestim (a se vedea chenarul despre Decremps la pagina 34), Decremps nu era un magician, iar ceea ce scrie el o arată clar. Știm că intenția sa a fost alta: să dezvăluie înșelăciunile lui Pinetti, așa cum a prezis titlul cărții sale.

Această carte este foarte diferită de *De Viribus Quantitatis*, unde Pacioli și Da Vinci expun în schimb cel mai bun mod de a prezenta un anumit joc și de a oferi indicații despre cum să îl joci; s-au distrat și au dorit ca cititorii să se distreze cu ei. Intenția acestor pagini este aceeași, speranța pentru toți cei care doresc să-și încerce mâna la un joc de magie matematică este că, jucându-1, se pot distra: dacă spectatorii observă că magicianul se distrează, vor fi implicați și mai mult.

Iată un alt sfat: înainte de a dezvălui un joc trebuie să te gândești la el; dacă jocul are scopuri educaționale (de exemplu, ultimul număr se poate face cu ușurință în clasă), îl

vom dezvălui numai după o pauză bună, pentru a vă face să credeți pe deplin în magia care a avut loc.

Acestea fiind spuse, să ne ocupăm de efectul descris mai sus. Vom folosi cărți pentru a pune în practică puțină algebră. Și, de asemenea, pentru a face o estimare a posibilelor rezultate ale jocului. Dar mai întâi, să repetăm încă o dată jocul anterior. De data aceasta nu voi da exemple de posibilități, pentru că aș vrea ca cititorii să încerce.

Să ne amintim de lucrurile esențiale: uitați-vă la primele cărți ale pachetului, puneți-le pe masă cu fața în jos și continuați să puneți până la 13. Cu cărțile rămase în pachet, faceți același lucru din nou, până când nu mai există cărți sau până când mai rămân, dar trebuie să fie puține de 13.

Gata? Bine. Numărați numărul de pachete care au fost formate (fără a lua în calcul numărul de cărți rămase, dacă există). Eliminați 4 din acest număr. Înmulțiți suma obținută cu 14, adăugați 4 la acest număr și adunați numărul de cărți rămase. Notați totalul.

Acum întoarceți pachetele pe rând și adunați valoarea cărților care apar. Cu siguranță suma va coincide cu numărul scris. Să facem o listă cu ceea ce se întâmplă:

- dând cărțile una câte una și numărând până la 13, în final sunt n pachete;
- cea mai mică carte din fiecare pachet are o valoare de a ,
($z = 1 \dots n$);
- în pachetul z sunt $14 - a_z$ cărți;
- la final rămân s cărți;
- în total se dau 52 de cărți.

Punând datele împreună într-o ecuație avem:

$$(14 - a_1] + (14 - a_2] + \dots + (14 - a_n] + s = 52$$

din care:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 14n - 52 - s$$

echivalent cu:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 14(n - 4) - s - 4$$

De multe ori aceste proprietăți matematice simple sunt folosite în magie. De exemplu, putem împărți mai întâi șase cărți și apoi patru, ceea ce echivalează cu împărțirea a zece cărți. Matematica utilizată în aceste cazuri este elementară: identitatea sumelor sau diferențelor, care totuși produc rezultate de mare efect. Magia are principii, precum matematica are teoreme. Două dintre acestea sunt utilizate frecvent: principiul pachetelor egale și cel al pachetelor complementare. Să vedem un exemplu al modului în care sunt exploatate aceste principii. Dezavantajul lor este că nu pot fi enunțate ca și cum ar fi teoreme. Ele sunt pur și simplu „utilizate”^{*1} și le-am putea rezuma astfel: dacă într-un pachet există o carte „importantă” în poziția a zecea și se elimină 6 cărți și apoi se adaugă alte 6 (diferite), cartea importantă continuă să ocupe poziția a zecea.

Aici subiectul este tratat doar pe scurt, cu intenția de a arăta că un număr simplu al poziției cărților într-un pachet ne permite să plasăm un anumit pachet în poziția dorită.

Un nou truc: o chestiune de ordine

Magicianul găsește un voluntar. Harry. Îi cere să ia câteva cărți din pachet, să le numere și să-și amintească câte sunt. După aceea, magicianul ia cărțile rămase și le arată lui Harry una câte una și, între timp, le numără, ținându-le la vedere (magicianul spune „Una!” Și o arată, „Două!” Și o arată,

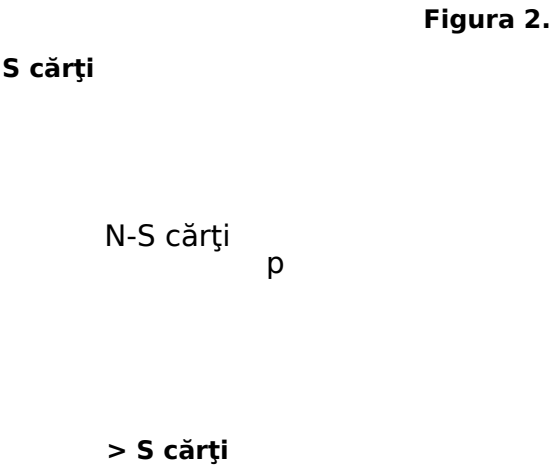
„Trei!”... și așa mai departe). Magicianul îl roagă pe Harry să-și amintească cartea a cărei poziție coincide cu cantitatea de cărți pe care o avea teancul luat din pachet. De exemplu, dacă a luat doar șase cărți, va trebui să aibă în vedere a șasea carte; dacă teancul era de zece, va trebui să țină cont de a zecea carte. Acestea fiind spuse, magicianul începe să extragă cărți, numărând până la 15; îl întreabă pe Harry dacă a trecut de cartea pe care o avea în minte și el spune că da. Lasă restul pachetului pe care îl împărțea pe masă, deasupra pune cărțile pe care le-a lăsat deja pe masă și peste toate așază teancul de cărți pe care Harry îl avea la început. Imediat după aceea, arată predicția pe care o lăsase scrisă undeva pe scenă: „în pachet, cartea ta se află pe poziția a 16-a”. Magicianul numără șaisprezece cărți, în timp ce Harry confirmă că aceasta este chiar cartea pe care o avea în minte.

Acest joc funcționează așa cum am prezentat, indiferent de numărul de cărți extrase de Harry. Trebuie doar să ținem cont de un detaliu pe care l-am explicat: când magicianul arată cărțile una câte una, le așază cu fața în sus într-un pachet pe masă, așa că inversează ordinea pe care o aveau la început. Nu este ciudat că, într-adevăr, cartea a rămas în poziția a 16-a dacă magicianul nostru a extras doar 15 din pachet? În realitate am fi putut extrage orice număr de cărți, N , neapărat mai mare decât numărul de cărți pe care Harry le-a extras la început. Dacă extragem N cărți, cartea secretă va fi în poziția $N + 1$. Ceea ce face mecanismul matematic al jocului este să compenseze ordinea inversă a cărților cu pachetul pe care Harry îl avea la început.

Iată un rezumat a ceea ce se întâmplă:

Lui Harry îi rămân 5 cărți.
 Magicianul arată N cărți $> S$], dar ordinea este inversată.
 Magicianul pune 5 cărți ale lui Harry deasupra pachetului.

Dacă observăm figura, vedem clar ce se întâmplă: pe cartea de ghicit (cea indicată de litera 5) avem $S + (N - S)$, cărți, adică sunt $A/$ cărți. Prin urmare, cartea la care ne-am gândit se află în poziția $N + L$



Capitolul 2

Geometrie și iluzie

Minciuni geometrice

Geometria este fundamentală în științele matematice; chiar numele său indică „măsura lumii”. În plus, utilitatea sa imediată are, de asemenea, o mare valoare în formarea noastră. Viziunea spațială este ceva care servește nu numai matematicianului, ci oricărei persoane. Un tâmplar sau un zidar nu trebuie să fie experți în matematică avansată sau calcul integral, dar vor avea întotdeauna nevoie de geometrie. Desenatorii, la jumătatea distanței dintre literatură și știință, simt adesea lipsa geometriei. La urma urmei, vederea este strâns legată de geometrie. Dar în școli se acordă mult mai mult spațiu calculului, în detrimentul acestei discipline.

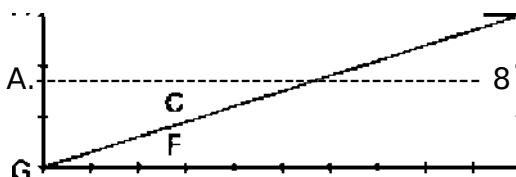
Întrucât nu suntem obișnuiți cu raționamentul geometric, vedem o serie de fapte curioase de care suntem obișnuiți să ne uimim, lucru de care magicienii profită masiv prin includerea acestor fenomene în repertoriul lor, poate nu chiar ca număr de vârf sau efect deosebit, dar ca o integrare ideală în spectacol. Deși este o parte mai puțin proeminentă a spectacolului, totuși nu

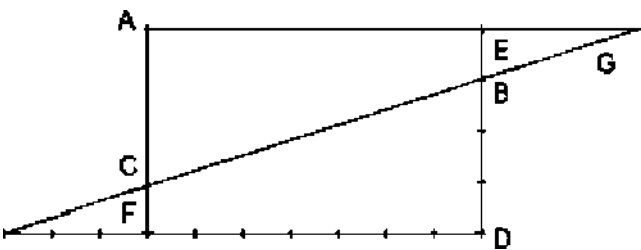
se dovedește mai puțin interesantă, nici pentru iluzioniști, nici pentru public. Sunt puse în scenă versiuni

foarte elaborate [asezonate cu atmosfera magică potrivită] ale problemelor foarte cunoscute pasionaților de matematică recreativă.

De exemplu, recent, videoclipul „ciocolatei infinite” a invadat rețelele de socializare. Să ne reamintim pe scurt despre ce este vorba pentru cei care nu l-au văzut: luând o tableta de ciocolată, se taie mai multe bucăți (chiar și pe diagonală, fără a urma desenul tabletei], apoi sunt puse la loc, pentru a realiza că rămâne o parte. Ideea de la baza acestui joc a apărut pentru prima dată în *Prima carte de arhitectură* a lui Sebastiano Serlio (1566), chiar dacă este prezentată nu ca un joc și nici măcar ca un paradox, ci ca un fapt. Ceea ce propune Serlio este să tăiați o placă de 10×3 , astfel încât să aveți la sfârșit un 7×4 , plus două triunghiuri dreptunghice cu laturile care măsoară 3 și 1: dreptunghiul este tăiat de-a lungul diagonalei, astfel încât să avem două triunghiuri dreptunghice de 3×10 . Apoi, acestea se suprapun astfel încât să iasă 3 centimetri de la fiecare dintre laturile mai lungi, așa cum se arată în figură. Ținând cont de faptul că noul tabel este de 7×4 plus cele două piese triunghiulare care ies în afară, suma suprafețelor este 31 și nu 30 ca la început. Ce s-a întâmplat de fapt? A apărut o unitate de suprafață!

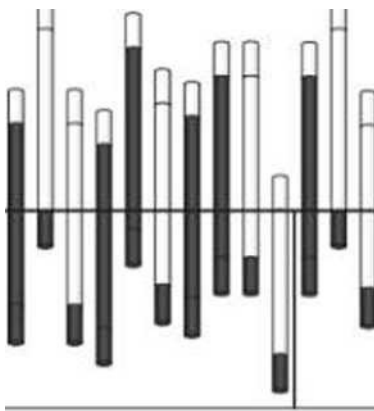
Figurai.





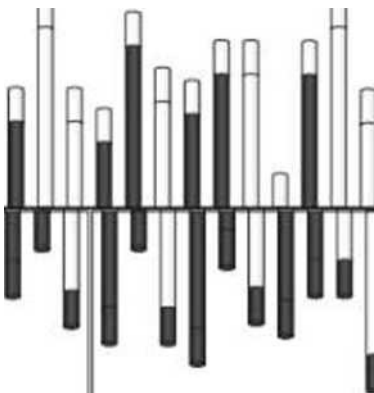
Incredibil... Serlio a făcut un truc de magie fără să vrea. Și, aproape cinci sute de ani mai târziu, a inspirat sute de videoclipuri de pe YouTube în care dispare ciocolata. Sincer să fiu, în cazul lui Serlio, triunghiurile dreptunghice cu laturile lungi 3 și 1 nu se dau la o parte, ci cele de 3 și puțin mai puțin de 1, presupunând că $3/10$ este mai mic decât $1/3$. Aici intră în joc asemănarea dintre triunghiuri și teorema lui Thales.

Priviți atent figura următoare:



Figura

Se văd șase baghete magice negre și șapte albe. Dar imprimând figura și tăind-o în prealabil de-a lungul liniei orizontale și apoi de-a lungul celei verticale în partea inferioară și inversând poziția celor două părți în jos (cea din stânga va merge la dreapta și cea din dreapta la stânga), vom vedea cum se schimbă numărul de baghete cu două culori.



Figura

Ce legătură are asta cu matematica? Ar trebui să schimbăm felul în care numărăm? În realitate, legătura dintre acest joc și matematică este mai mult o relație între lungimi: totul trebuie gândit și măsurat pentru a tăia exact într-un singur punct, unde vom avea „puține” bețișoare, și în acest fel va părea că își schimbă culoarea. Însă ceea ce nu se schimbă niciodată este suma lungimii bețișoarelor de aceeași culoare. Le-am poziționat doar într-un alt mod. Acest lucru se întâmplă ca o consecință a proprietății comutative: ordinea în care adunăm lungimile nu este importantă.

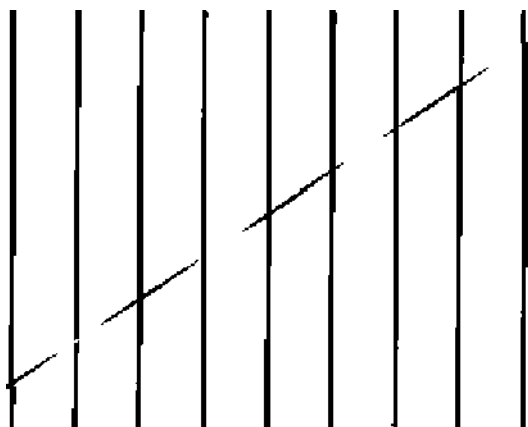
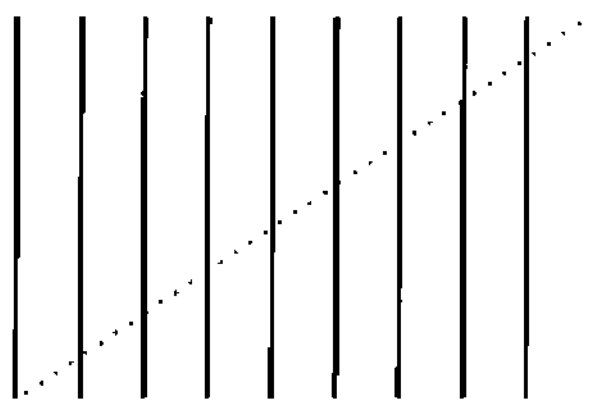
Geometria este o ramură a matematicii care, în ciuda importanței sale în educație, nu este adesea predată suficient în școli. Dacă ne concentrăm asupra trucului matematic, nu este dificil să concluzionăm care este bețișorul care își schimbă culoarea: cel de deasupra liniei orizontale care împarte imaginea are doar capătul bețișorului. Precauția suplimentară pe care trebuie să o iei pentru ca magia să fie perfectă este respectarea schemei de culori prezentă în desen, deoarece, în ciuda matematicii, care nu minte, pentru a crea o iluzie este necesar să înșelăm percepția.

Există multe versiuni ale jocului tocmai explicat. Referințele la aceste puzzle-uri pot fi găsite încă din 1880. Mai mult, există o versiune care, în loc de tăieturi drepte și deplasarea elementelor, folosește o tăietură circulară plus un viraj; aceasta este enigma numită „Get off the Earth”, de Sam Lloyd, din 1896, asemănătoare unui glob format din diferite piese (adică puzzle-ul). Căutând pe internet aceste puzzle-uri, veți găsi tot felul de imagini. Există multe versiuni și unele dintre acestea sunt comentate de Martin Gardner în *Misterele magiei matematice*. Poate, însă, cea mai cunoscută versiune de astăzi este cea cu spiridușii care

dispar („The Vanishing Leprechaun”), concepută de Pat Patterson Lyons în 1968 și publicată în același an, chiar dacă doar recent a fost difuzată foarte mult pe internet.

Toate versiunile se bazează pe acest principiu: tăind (după ce ați făcut bine măsurătorile) de-a lungul unei diagonale și apoi mutând piesele, obțineți mai puține segmente, dar mai lungi.

Figura 6.



Matematica este aceeași indiferent dacă vorbiți despre segmente sau despre spiriduși, dar iluzia cu spiriduși are efecte speciale. În puzzle, se întâmplă același lucru: avem 14 spiriduși mai înalți și 15 care sunt mai mici. Cu toate acestea, la un moment dat, în mod ciudat, cele 14 capete devin 15* Ideea ascunsă este aceeași: un spiriduș are mai puțin păr, altul are ochii mai puțin alungiți, altul are gura mai mică., în fine, iată ce poate deveni matematica atunci când apare într-un desen frumos: în loc să luați în considerare, pur și simplu, lungimile segmentelor,

puteți face o vrajă.

Anamorfoze și stereoscopii

În unele ocazii, iluzioniștii au folosit imagini care au sens atunci când sunt privite dintr-un anumit punct de vedere, în timp ce din altele nu pot fi interpretate în niciun fel. În această categorie intră, de exemplu, umbrele chinezești, care sunt uneori văzute în spectacolele de magie. Desigur, artiștii care desenează umbre chinezești fac acest lucru urmărindu-și propria inspirație, fără a face calcule matematice, totuși matematica este prezentă. În *Dicționarul Institutului Enciclopediei Italiene*, *anamorfoza* este definită ca „un tip de reprezentare picturală creată după o deformare în perspectivă care îi permite să fie vizualizată corect dintr-un singur punct de vedere (în schimb, rezultă deformată și de neînțeles dacă este observată din alte poziții)”. Mai mult decât atât, numele său sugerează originea sa dintr-un cuvânt grecesc care înseamnă „transformare”. Pentru a ne referi la acest tip de transformări, care au apărut împreună cu primele studii asupra perspectivei, în italiană (nu și în limba română, n.tr.) termenii „anamorfoză” și „anamorfism” sunt folosiți ca sinonimi. Alte exemple de anamorfoză se găsesc în caietele lui Leonardo da Vinci, și de-a lungul timpului au fost adăugate altele. Adesea chiar și așa-numitele „madonnari” pictate pe trotuar reproduc desene care, dacă sunt privite din punctul de vedere corect (numit *punct privilegiat*), oferă o viziune tridimensională cu adevărat impresionantă.

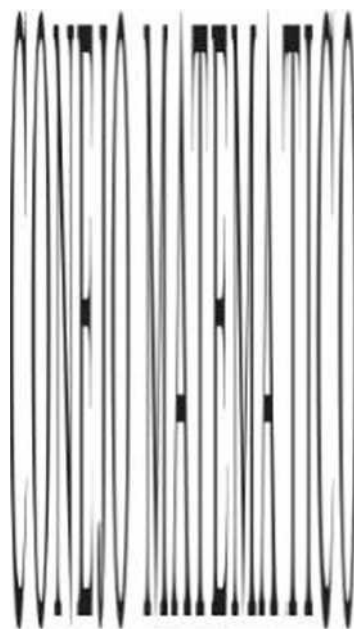
la un exemplu: trebuie să aflați ce ascunde imaginea alăturată. încercați să o citiți într-un alt mod: plasând cartea pe orizontală, mai mult sau mai puțin la nivelul ochilor. Poate fi util să înclinați ușor imaginea.

Nu-i așa că este mai ușor de citit? Poate că nu am observat și ni se va părea ciudat, dar chiar și semnele rutiere sunt imagini anamorfe; de fapt, acestea sunt clar lizibile din punctul de vedere al șoferului. Semnul universal recunoscut ca fiind STOP, desenat pe trotuar sau triunghiurile care ne amintesc să cedăm trecerea, în timp ce suntem pe jos, sunt mult mai alungite decât atunci când mergem cu mașina. Acest lucru depinde de înălțimea șoferului și de timpul în care pot fi citite literele sau chiar de modul în care fixăm imaginile.

Probabil, cititorii care frecventează muzeele de știință au întâlnit o versiune a „camerei lui Ames”, un obiect creat de omul de știință american Adelbert Ames Jr. în 1946 pentru a studia fenomenele legate de percepție. Puteți să vă plimbați în cameră și să o observați din exterior printr-o gaură (situată în punctul privilegiat al anamorfozei]: ca urmare, oamenii par mai înalți sau mai scunzi, în funcție de partea camerei spre care se îndreaptă. Dacă nu direct într-un muzeu, veți găsi mai multe exemple ingenioase pe internet.

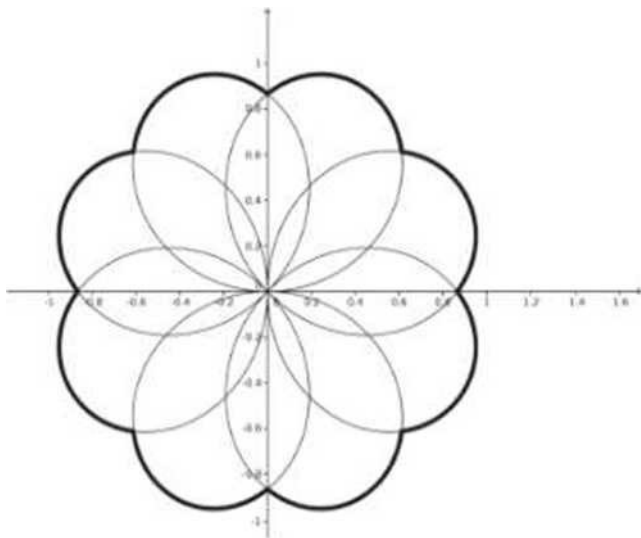
Un artist care a dorit să exploreze lumea științei este Salvador Dali. Lucrările sale se referă la diverse principii

Figura



matematice, precum celebrul logo al mărcii Chupa Chups, proiectat de el, și care corespunde curbei $r = \sin(40/3)$ în coordonate polare. Sau versiunea sa despre *Cina cea de Taină*, pe fundalul căreia apare un dodecaedru similar cu cel desenat de Leonardo da Vinci în *De Divina Proportione* a lui Pacioli (și nu va fi ultima dată când îi vom menționa împreună, Leonardo și Luca). Dar anamorfozele au o semnificație deosebită în opera lui Dali. Există anamorfoze care pot fi văzute corect numai dacă se reflectă pe o oglindă cilindrică, cum ar fi *Arlecchino*, dar și alte altele mai elaborate precum *Salotto di Mae West*, unde, dintr-un punct privilegiat, obiectele camerei sunt văzute astfel încât să creeze chipul actriței, în orice caz, relația artistului catalan cu magia a fost foarte intensă: pe lângă faptul că a creat scenografia secvenței visului din filmul *Spellbound* (*Fascinație*)

Figura 8. Salotto di Mae West, de Salvador Caii. Privite din punctul privilegiat, obiectele din cameră se văd astfel încât creează chipul actriței. Mai jos, reconstrucția siglei Chupa Chups creată de pictor. de Alfred Hitchcock, el s-a ocupat de scenografia baletului *Tricornul*: scenele inițiale apar foarte sobre, dar brusc se creează o iluzie, cu un portocal care crește de la sol, cu uși și ferestre suspendate în aer. Fără a fi iluzionist și nici măcar



matematician, Dalf a reușit să folosească matematica pentru

a obține efecte magice.

Lăsăm anamorfozele pentru a merge să explorăm un alt efect magic în care se găsește matematica: stereoscopice. Mulți au întâlnit acest tip de imagini în cartea *Ochiul magic*, ceva cu adevărat magic. Iluzioniștii se joacă cu percepția și cu crearea iluziilor care, în acest caz, corespund viziunii unui obiect tridimensional plecând de la o imagine bidimensională. Pentru a putea vedea imaginile tridimensionale ascunse, poziționați figura la aproximativ 20 de centimetri distanță de ochi, așezată perpendicular, și apoi o apropiați. La început veți vedea o imagine dublată, deoarece ochii noștri nu sunt capabili să o focalizeze bine, dar repetând cu multă răbdare, la un moment dat imaginea va fi stabilă. În acel moment, veți vedea fenomenul tridimensional. Nu este dificil să construiți singuri o stereoscopie, de fapt există multe programe special create, chiar și gratuite. Deși stereoscopiile mai frecvente sunt cele care folosesc doar imagini, puteți obține un efect similar cu un text. De exemplu, în textul din figura 10 puteți citi literele „FB” în 3D.

O altă posibilitate oferită de stereoscopia este aceea de a pune în evidență un anumit text, putând astfel să ajutați la dezvăluirea magică a ceva, să faceți o predicție sau pentru a crea efecte foarte speciale, în acest scop folosim un pasaj luat dintr-o carte magică, scrisă de un matematician care se distra cu magia și cu jocurile de cuvinte. Cu siguranță. Lewis Carroll s-a amuzat cu iluzii optice de acest fel

Înainte de toate trebuie să observăm cele două coloane de text, aducându-le mai aproape până când ambele sunt focalizate. Când veți vedea o imagine clară [stereo, deoarece sunt implicați amândoi ochii], veți distinge un cuvânt în evidență, care are legătură cu titlul acestei cărți...

A] i. i-i. .1 oy:': un	s Alicia nyó un rridito do pasen
ruidito do past.^ rny 'a	pnr la
Ccnipr^ncii :i qnt ¹ era el ',oneio	p s es l * r a . Ce irp r =-n r] i ó gus
■eue subía «n ši; biLsna y se schri	era el Conejo rj-.u? subía
r. t.eniLLar L:OJI tul iUHIZA	sn su b'.ssca y SP scshñ a t.eiiüJld:
	T:OTL tul íiswtzd
que sdcjdiú coda ğ.a caüa, olvidando	que ũacudío lóela la casa, olvidando
que ahora era jiiill vHL'si mayó: que	qns ahora ara r.il vtcej siiayui quw
«1 Cyjeiv bldjiüo y nú hubia p<u ?	el Conejo Bldisco y no tiibiu fjoc ■
Línio ru>l ivrí .i l i n i < r par ši	nuil ;v:i .liy.rnc
muer Jo miedo.	p.ir-a tor.oi l^ rilado. Ahora *>l
Ahi'tri „ 1 CniiP]n liahi'o] leqado	Crsi^în hahíri]'.ocjabo ai"o pijería,
aCsO 'a pues". a, e intsr.tó abrírla,	o i rirent ó abrírla, pero, com." la
ppto, cosnt; la puert a sí? abría	puerta se abría nacía adeir.ro y el
hacia adencro y e. coco de Alicia	coso de Alicia FSt.r.Pa 11 ie r terrien
sitaba tissrbsTrsnts	re

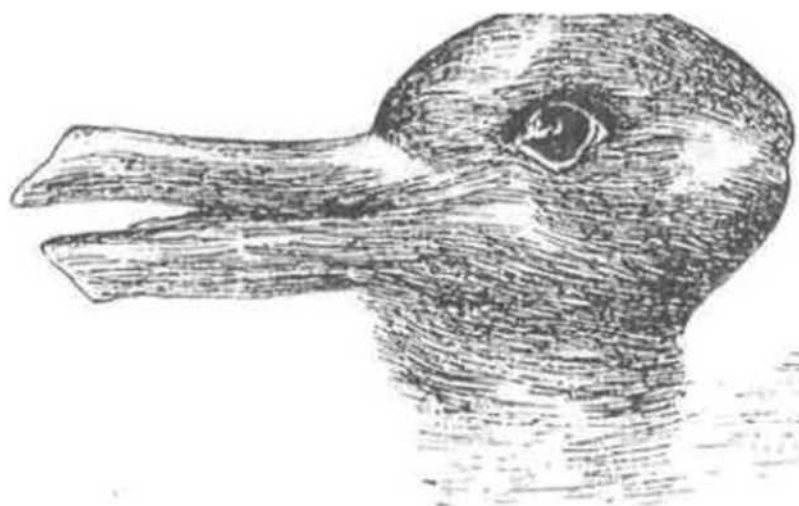
apeyadu Lújilid el Id, jüü Coi: ;r. J	apCiydLiu Cùì'.tià èl là/ no
yil L O JiicVri f L d .	veri.,, Figura 10.

Acest lucru este fascinant, dar cum funcționează acest mecanism? În realitate, depinde de modul în care vede ocbiul și de modul în care se formează imaginea pe care o „vedem” Ochii se comportă ca niște lentile, dar creierul trebuie sa interpreteze ceea ce ajunge la el Prin urmare, pentru a putea descifra stereoscopiile. este necesar să vă antrenați: la început imaginile pe care le vedeți vor fi neclare sau confuze, dar când vom ajunge la distanța corectă, brusc creierul va îmbina imaginile

dintr-un anumit motiv, sunt menționate în special în cărțile de științe recreative. Spre deosebire de stereoscopii și anamorfoze, nu este necesar să se explice ce este o iluzie optică. În această categorie putem include obiecte sau imagini imposibile care, în funcție de modul în care se privesc, par diferite. În ultima vreme, internetul a stricat figura unei balerine, care se rotește în sensul acelor de ceasornic sau în sens invers acelor de ceasornic, în funcție de modul în care o privești sau de modul în care te concentrezi să o privești. De asemenea, ca și în cazul stereoscoپیilor, cu puțină practică, creierul nostru este capabil să aleagă și în ce direcție să întoarcă balerina. Totul este o iluzie. Și este dovedit științific.

Una dintre iluziile optice la care apelează adesea iluzioniștii este similară cu aceasta:

Figura



Iluzia „rață-iepure” a apărut pentru prima dată în 1892 (cel puțin până când atâta timp cât nu se va demonstra contrariul) într-o revistă germană de umor. Există multe versiuni ale acestei iluzii optice, precum și versiuni tridimensionale. La mai bine de un secol după prima sa publicare, Peter și Susanne Brügger, cercetători de la Departamentul de Neurologie al Spitalului Universitar din

Zürich, au publicat un sondaj statistic curios care vizează investigarea percepțiilor oamenilor: au văzut iepurele sau rața? Răspunsul depindea de vârstă și, de asemenea, de perioada anului. Rezultatele studiului au arătat că majoritatea copiilor (dar și adulții) au văzut mai des un iepure, pe măsură ce se apropia Paștele, în timp ce în octombrie cei mai mulți au văzut o rață (sau o pasăre). În studiul percepției și al altor probleme psihologice, statistica este o știință esențială, ceea ce demonstrează încă o dată utilitatea științelor matematice.

Există o versiune mai complexă a iluziei rață-iepure în lucrările lui Salvador Dali. Poate cititorii își amintesc de pictura sa din 1937, *Lebede care reflectă elefanți*, în care, în funcție de modul cum privești tabloul, poți vedea lebede sau capete de elefant. În autobiografia sa, *Undiluted Hocus Pocus*, Martin Gardner povestește că l-a cunoscut pe Dali și că a luat masa cu el de mai multe ori. Într-o zi, Gardner i-a dăruit pictorului o figură de porțelan în formă de rață-iepure. O iluzie optică tridimensională, pe care geniul din Eigneres a folosit-o pentru a reprezenta omagiul companiei Air India către proprii clienți: este o serie limitată de scrumiere în formă de cap de elefant, dar care atunci când sunt întoarse devin o lebedă, lată din nou magia ascunsă în geometrie: elefanții se transformă în lebede și invers.

Scurtmetrajul produs de Disney intitulat *Destino* colectează o serie de iluzii optice desenate de Dali. Pare o vrajă reală, reușește să se joace cu iluziile și cu sentimentele privitorului. Animația durează puțin peste șase minute și ascunde multă matematică, cum ar fi anamorfoza și iluziile optice și, desigur, caracteristicile stilului lui Dali sunt recunoscute. *Magia* Disney de data aceasta este matematică și merită să ne uităm la această minune capabilă să

transforme geometria în iluzii.

Un alt iluzionist strâns legat de știință este Jerry Andrus. Într-un videoclip celebru puteți vedea dinozauri tridimensionali la care dacă

MARTIN GARDNER

Autor al rubricii de jocuri matematice pentru revista *Scientific American*, Martin Gardner ('914-20'0) este cel mai mare scriitor de matematică din secolul XX. Deși nu este un adevărat matematician, el a



frecventat principalii experți în această disciplină, implicându-i în calitate de consultanți pentru a obține feedback științific pentru articolele sale. El a inventat cuvântul „matemagie”, precum și scrierea primei cărți dedicate special magiei matematice: *Misterele magiei matematice*.

Matematicienii recunosc în special valoarea operei sale ca scriitor. Și este curios că a fost considerat, de asemenea, o autoritate în lumea iluzionismului, în ciuda faptului că nu a avut obiceiul de a performa în public. Cu toate acestea, în calitate de cititor, savant și istoric al magiei, Gardner s-a implicat la fel de mult în ambele domenii. De asemenea, a creat câteva jocuri în care iese lumii divertismentului se căsătorește cu știința. În plus față de articolele publicate în ciferite reviste de iluzionism, multe dintre contribuțiile lui Gardner la magie sunt repetate în lucrarea sa *Encyclopedia of Illogical Magic*.

Activitatea lui Martin Gardner a fost, de asemenea, utilă în demascarea ciferitelor escrocherii pseudoștiințifice. Prin urmare, pe lângă contribuțiile sale în matematică și în magie, este amintit și ca un campion în lupta împotriva fraudei spiritiștilor, în special în cartea sa *În numele științei*, publicată în '952.

Despre el, matematicianul Ronald Graham a spus că „a făcut mii de copii să devină matematicieni și mii de copii de matematicieni”. Nimic nu ar putea fi mai adevărat: opera lui Martin Gardner a avut o mare influență asupra multora dintre noi, matematicieni (și

magicieni).

ne uităm, par să ne urmărească privirea. Totuși, dintr-odată, camera se mișcă și descoperim că dinozaurii nu sunt în relief, ci în interior. O altă faimoasă iluzie a lui Andrus bazată pe aceeași tehnică propune roți mari dințate traversate de creioane uriașe. Ceva similar este oferit de figurile lui Subirachs în Sagrada Familia din Barcelona: chipurile, în loc să fie în relief, sunt concave. Această iluzie optică este cunoscută sub numele de *iluzia chipului gol*. Iluzia dinozaurului a reprezentat un fel de omagiu al lui Andrus pentru participanții la *Gathering for Gardner*, întâlnirea anuală la care sunt prezenți matematicieni, magicieni și fanii ghicitorilor logice, despre care vom mai vorbi. După ce Martin Gardner a decedat în 2010, s-a stabilit sărbătorirea datei nașterii sale, 21 octombrie, prin întâlniri în întreaga lume axate pe probleme abordate de autor. Organizarea evenimentului în timpul ședințelor pune la dispoziție diverse materiale și printre acestea se află și trusa pentru construirea faimoșilor dinozauri.

În acest context, vom folosi un model mult mai simplu și vom face un cub. Decorându-l cu desene, va ieși un obiect drăguț și curios (de exemplu, dacă desenați fețele cu buline, va arăta ca un zar). Pur și simplu, decupați figura și lipiți-o pe interior (adică în așa fel încât să rămână concavă, figura 14), așa cum este explicat în instrucțiuni. După aceea, trebuie să încercați să-I priviți de sus sau, și mai bine, să-l filmați cu un telefon mobil. Iluzia va fi aceea de a vedea un cub tridimensional normal.

Multe dispozitive fizice arată ca niște instrumente cu puteri magice. Unul foarte simplu, numit „taumatrop”, inventat de John Ayrton Paris în 1824, a fost prezentat Colegiului de Fizică din Londra pentru a ilustra principiul persistenței retinei. Obiectul este ușor de construit; pur și simplu aveți un carton format din două discuri, faceți un desen pe fiecare dintre discuri (cu precizie matematică, astfel încât imaginile să se suprapună], apoi îndoiți cartonul și faceți-l să se întoarcă (figura 15). În versiunea lui Ayrton Paris a fost desenat un papagal pe o bucată de carton și o cușcă pe celălalt. Trecând benzi de cauciuc pe părțile laterale ale cartonului și răsucindu-le pentru a-l face să se întoarcă, vom vedea papagalul în interiorul cuștii.

Încercați ca să vă convingeți!

De ce se întâmplă asta? Nu este atât de ciudat. Retina noastră are celule fotosensibile și, atunci când lumina ajunge la aceste celule, are loc o reacție chimică care generează un semnal trimis către creier, care va interpreta ceea ce vedem. Este nevoie de puțin timp pentru a genera o reacție (foarte puțin, mai puțin de o zecime de secundă), astfel încât imaginea rămâne pe retină un moment înainte ca următoarea să fie percepută. Învârtind foarte repede taumatropul, imaginea este trimisă la retină înainte ca cea anterioară să dispară, astfel încât imaginile se suprapun și creierul nostru interpretează cele două desene ca fiind unul singur. Cu acest „joc” s-a anticipat ideea cinematografei, care a început să încânte

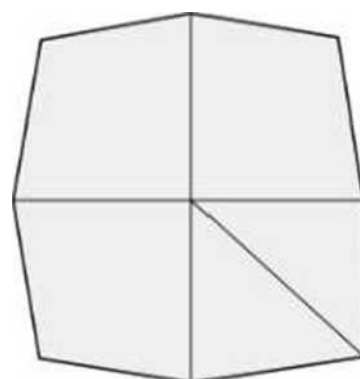


Figura 14. Cub sau pătrat? Modul de asamblare a acestui cub tridimensional este foarte simplu. Fețele cubului vor fi formate din ce e două patrulatere de deasupra și de patrulaterul de jos din stânga. Ce din dreapta jos trebuie tăiat de-a lungul diagonalei, împărțindu-l în alte două triunghiuri pe care le vom folosi ca o limbă

tocmai în spectacolele de iluzionism.

Topologie, noduri și frânghii

Dacă ești pasionat de magie, numerele spectaculoase realizate cu frânghii îți vor fi familiare: frânghii care se rup și apoi se reasamblează, inele care se unesc și se separă, șireturi care străpung corpul unei persoane. Acest tip de trucuri se încadrează în categoria *jocurilor topologice*, pe care iluzioniștii se bazează foarte mult. Una dintre minunile cu care magia ne poate uimi este că sfidează legile fizicii și matematicii pe care le luăm de la sine, reușind să obțină un rezultat

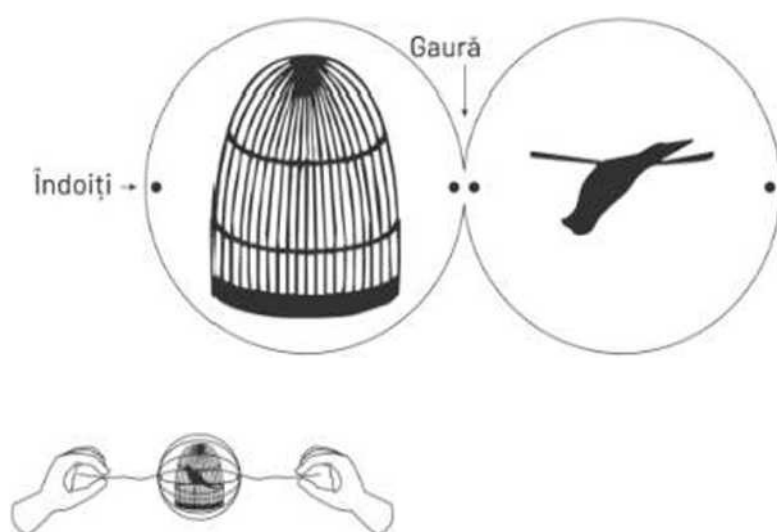


Figura 15. În cușcă.
Prin rotirea bucății de
carton, micuțul
nanaș se va redăci

„imposibil”. Alteori, cifrele prezentate de iluzioniști par simple distracții, unde o mică variație poate declanșa efecte de neconceput.

Multe dintre jocurile făcute cu frânghii au legătură cu noduri false. Simplul fapt de a schimba punctul pe unde trece o frânghie este cheia formării unui nod sau nu. Unul

dintre cei mai eminenți matematicieni din teoria nodurilor – care studiază curbele închise împletite în spațiu – este matematicianul englez John Horton Conway. A lucrat în diferite domenii ale matematicii, dar s-a dedicat în principal căutării unui algoritm care să-i permită să decidă când încurcătura unei frânghii este sau nu un nod. Deși întrebarea poate părea simplă, nu este absolut deloc. Imaginați-vă că luați o bucată de sfoară și o răsuciți (gândiți-vă, de exemplu, la momentul în care un încărcător de telefon mobil aflat într-un sertar se răsucește). Uneori reușiți să descurcați cablul într-o clipă, alteori se formează noduri, lată importanța obiectivului lui Conway. Mai mult, nodurile au depășit domeniul matematicii teoretice pentru a-și găsi utilizarea în multe alte domenii. Poate că primul domeniu de dezvoltare a fost cel al biologiei moleculare, dat fiind că topologia lanțurilor de ADN se modifică ca urmare a unui proces biochimic, favorizând formarea enzimelor. Importanța sa a fost demonstrată și în teoria cuantică a câmpurilor și în alte ramuri ale fizicii, cum ar fi mecanica statistică sau domeniile care studiază materia condensată și fizica particulelor.

În acest context, avem de-a face cu un aspect al teoriei nodurilor care este întotdeauna util: distracția. John Horton Conway este cunoscut mai ales ca cercetător, dar a avut un interes extraordinar în matematica recreativă. Acesta nu este un aspect de răs: la fel ca mamiferelor, și oamenilor le place să se joace, iar prin joc învață un număr infinit de lucruri. Există oameni de știință care neagă un aspect al educației la fel de important ca acesta, dar cu siguranță nu este cazul lui Conway; de fapt, el a scris împreună cu alți autori o minunată serie de cărți despre matematica recreativă (*Winning Ways for your Mathematical Plays*),

capabile să stimuleze raționamentul matematic și căutarea unor metode alternative de rezolvare a problemelor, care la urma urmei este scopul final al științelor matematice.

În documentarul lui David Suzuki *The Nature of Things*, Conway poate fi văzut jucând câteva jocuri topologice cu frânghii sau doar folosindu-și mâinile. Dar să luăm câteva exemple în care se arată clar dificultatea de a înțelege dacă am legat sau nu un nod. Pentru a efectua corect aceste jocuri, este nevoie de o sfoară. Magicienii folosesc șireturi flexibile din bumbac, care de multe ori par să aibă „suflet”. Le puteți cumpăra de la mercerie, important este să fie flexibile.

Acest joc constă în plasarea frânghiei pe masă așa cum se vede în figura 16. Dacă vrem să creăm o atmosferă magică, trebuie să o facem mișcându-ne cu nonșalanță, ca și cum frânghia ar fi aruncată la întâmplare. După aceea, cerem unui voluntar să introducă degetul arătător în fanta centrală (în punctul marcat cu un +] și, în același timp, tragem frânghia de la cele două capete. Procedând astfel, degetul este prins.

Dacă, dimpotrivă, facem astfel încât capătul stâng să se afle pe spatele frânghiei, adică A trecând peste C, spre deosebire de ceea ce este reprezentat în figură, și îi cerem colaboratorului nostru să introducă

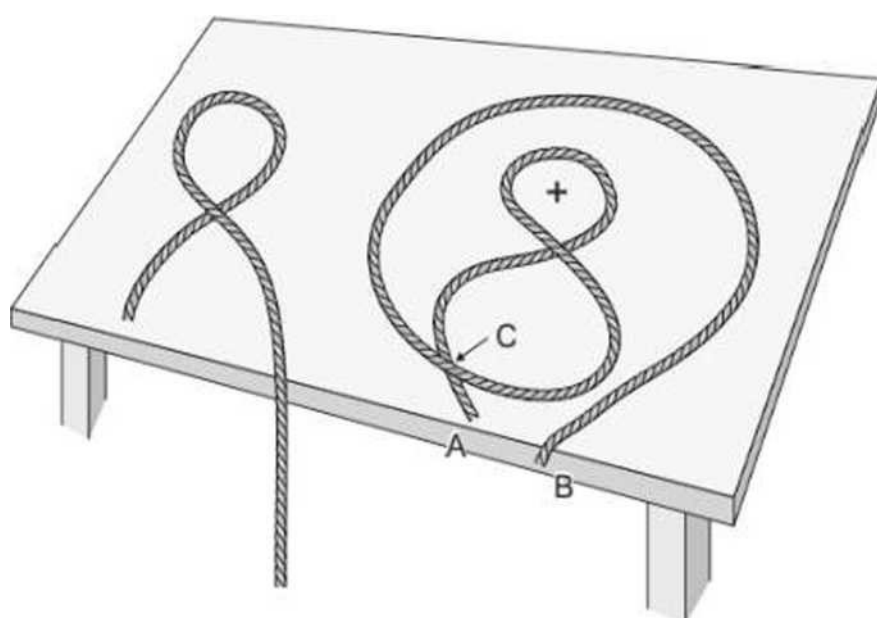


Figura 16. În capcană. Ilustrația arată, în două etape, cum să aranjați frânghia, astfel încât degetul colaboratorului distras să rămână prins în nod.

degetul arătător în fanta centrală, în timp ce trageți cele două capete ale frânghiei în același timp, degetul va rămâne liber.

De ce? Deși aparent pozițiile sunt similare, punctul de la care trece capătul A al frânghiei este fundamental: dacă este deasupra sau sub punctul C este cheia formării unui nod. Cu aceasta găsim, într-un anumit fel, problema pusă de Conway în videoclipul pe care l-am menționat: în ce condiții se formează un nod și în care nu. Aranjarea frânghiei noastre este foarte asemănătoare, dar într-unul din cele două cazuri se poate forma un nod, iar în celălalt nu. Încercați pentru a crede!

Acum să vedem un alt exemplu, pe care de obicei îl propun elevilor la clasa de magie matematică. În primul rând, anticipez că vom efectua cel mai rapid nod din lume și fezabil într-o clipită. Este suficient să spuneți că „Trebuie doar să unim mâinile și... Nodul este terminat!”. Și în

realitate chiar așa este. În acest moment, de obicei, întreb



Figura 17. Nodul cel mai rapid din lume.

elevii care sunt deja gata să repete. Mă așez în poziția de plecare și le cer să-mi imite mișcările.

Să încercăm împreună. Trebuie să vă așezați ca în figura 17, adică având mâinile paralele ridicate cu palmele spre interior și să luați frânghia în așa fel încât capătul din mâna dreaptă să atârne în exterior, iar cel din mâna stângă să atârne în interior. Pornind de la această poziție, apropiați-vă mâinile și prindeți capătul care atârnă de mâna dreaptă cu stânga și, invers, capătul care atârnă de mâna stângă cu dreapta. Din acest motiv, este recomandabil să începeți cu mâinile în poziția indicată: este mai ușor să prindeți capetele.

Este amuzant să vezi cum, foarte des, cineva nu observă că un capăt al frânghiei atârnă spre interior, iar celălalt spre exterior. Și acest lucru creează o situație comică și de complicitate cu restul publicului, pe care o putem folosi în avantajul nostru.

Am început acest paragraf vorbind despre o personalitate, John Horton Conway, și îl vom încheia – la fel și capitolul – cu un matematician și mai ilustru, Sir Roger Penrose. În lumea iluziilor optice, „scara Penrose” este bine cunoscută și a fost pusă în scenă de mai multe ori, chiar și în unele programe de televiziune. În ciuda faptului că este un matematician de prim rang, care a avut parte de multă recunoaștere, Penrose s-a ocupat și de unele probleme de

logică recreativă care pot deveni foarte bine trucuri de magie.

Acest joc a) lui Penrose pare să formeze un lanț de noduri pas cu pas, așa cum se arată în figura 18.

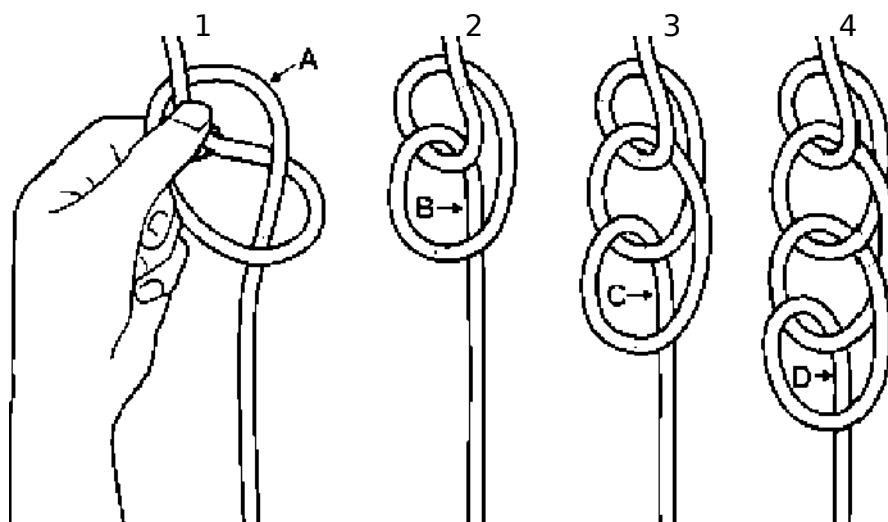


Figura 18. Jocu ui Sir Roger

Cu cât coarda este mai lungă, cu atât mai bine. Să începem prin a face un nod „normal” așa cum se arată în primul pas. Apoi, trebuie să sprijinim frânghia între degetul mare și arătătorul în partea indicată de litera A, trageți și faceți o altă butonieră, pentru a ajunge la situația desenată în pasul doi. Ideea este de a trage din acel punct pentru a obține o butonieră care „înfășoară” nodul pe care l-am avut la început Cel mai bine este sa încercați de mai multe ori ca să câștigați încredere, chiar dacă lăsați frânghia pe o masă. După ce ați obținut acest rezultat, următorul pas implică apucarea frânghiei în punctul indicat de litera B și, procedând în mod similar cu ceea ce s-a făcut deja, înfășurați nodul de jos pentru a ajunge la situația ilustrată în al treilea pas; prin urmare, este esențial să înțelegem bine procesul care trebuie efectuat între pașii 1 și 2, deoarece se repetă: apucăm frânghia în punctul C, o tragem și astfel creăm o altă buclă. Putem continua atât timp cât avem frânghie.

Pentru a face magie trebuie doar să îi cerem unui spectator să apuce frânghia de una dintre butoniere. Apoi vom trage puternic de la capetele frânghiei și vom vedea cum se formează un nod chiar acolo unde este ținută frânghia. Știință sau magie?

Capitolul 3

Probabilitate în magie

Jocuri contraintuitive

În programele de liceu, probabilitățile reprezintă un subiect care este omis în absența timpului. În opinia mea, aceasta este o greșeală, deoarece toți trebuie să ne perfecționăm intuiția probabilistică. Am spus-o și în capitolul anterior: la școală, geometria și probabilitățile sunt tratate cu aceeași ușurință. Poate pentru cei care nu intenționează să devină oameni de știință sau ingineri, dobândirea noțiunilor de calcul integral nu va părea fundamentală, dar vor trebui totuși să cunoască probabilitățile. Conceptele de bază ale acestei ramuri a matematicii ne-ar ajuta, de exemplu, să înțelegem cât de dificil este să câștigi la loto sau, și mai greu, la loteria națională.

Profesioniștii din pariuri profită de aceste lacune pentru a-și învinge concurenții: nu ratează cazurile în care șansele, chiar dacă minime, funcționează în favoarea lor. De fapt, companiile de asigurări fac bani calculând probabilitățile [și fiind plătiți pe baza probabilității mai mari sau mai mici de apariție a dezastrelor]. Politicienii organizează campanii electorale bazate pe statistici și sondaje, iar statisticile sunt direct legate de probabilități.

Prima referință documentată tipărită la un joc de cărți de magie se găsește în *De Subtilitate Rerum* (*Despre simplitatea lucrurilor*), o carte a lui Gerolamo Cardano, care era jucător. Dar, fără îndoială, în *Liber de Ludo Aleae* (*Cartea jocurilor de noroc*), Cardano stabilește câteva axiome ale teoriei probabilităților: făcând unele calcule în timpul jocului, a observat că ar putea exista avantaje. În plus, în cartea sa oferă jucătorilor sfaturi care se aplică și astăzi. Printre diferitele recomandări, el spune: „într-o epocă în care frica și tristețea sunt extinse, când chiar și cele mai luminate minți pot deveni confuze, pentru a combate anxietatea, jocul este o metodă mai eficientă decât șahul, deoarece implică o așteptare a ceea ce va aduce noroc”; cartea oferă, de asemenea, sfaturi utile ca acesta: „Trebuie să te moderezi în jocul pe bani; altfel, cu siguranță nimeni nu ar trebui să joace vreodată”. În lucrare găsim și ceea ce autorul definește ca *principiu fundamental al pariurilor*:

Cel mai important principiu al tuturor jocurilor de noroc este, pur și simplu, egalitatea condițiilor: bani, situație și zaruri. Departe de această egalitate, dacă joacă în favoarea rivalului, dovediți că sunteți puțin inteligent, în timp ce, dacă este în favoarea dvs., sunteți nedrept.

1 Iluzionistii au de-a face cu acest tip de nedreptate, de fapt fac pariuri în care vor câștiga cu siguranță. Aproape întotdeauna, ei vor organiza un joc determinist al cărui rezultat îl cunosc foarte bine, dar vor putea, de asemenea, să efectueze numere nereușite. Nu este grav; dacă din întâmplare greșeste, aceste momente contribuie la a-1 face pe iluzionist simpatic în ochii publicului, confirmând că nu există trucuri. Iată motivul pentru care este important să cunoașteți multe trucuri și să modificați tehnicile din cadrul

aceluiasi spectacol.

Să luăm un exemplu practic. Sunt necesare două pachete, unul cu spatele albastru și unul cu spatele roșu. Luați trei cărți din fiecare pachet și pregătiți un tub de lipici, deoarece va trebui să atașați (față în față) două cărți roșii, astfel încât spatele roșu să rămână vizibil.

De asemenea, va trebui să lipiți două cărți albastre în același mod și, în cele din urmă, să lipiți o carte roșie cu una albastră. Faceți marginile cărților să coincidă bine, astfel încât prin atingere să nu fie posibil să se distingă perechile lipite. În afară de culoare, toate cărțile trebuie să arate la fel.

Apoi, puneți cele trei cărți duble într-o pungă, închideți ochii și alegeți una. Lăsați-o pe masă, astfel încât atunci când deschideți ochii să vedeți o singură față. Să presupunem că este extrasă cartea roșie. Și acum, să facem un pariu: ce culoare are fața ascunsă?

Gândiți-vă o clipă la asta... Vă puteți gândi la ceva?

Iată un ajutor, amintiți-vă culorile cărților: ceea ce vedem acum este o latură roșie, deci există doar două posibilități pentru cartea pe care ați luat-o: trebuie să fie în mod necesar cartea roșu-roșu sau cartea roșu-albastru. Pentru ambele există o șansă de 50%. Deci pentru noi este la fel să pariați pe roșu sau pe albastru.

Acest lucru este în teorie, deoarece în realitate nu este cazul. Am câștiga mai mult pariind că fața ascunsă este roșie. Nu credeți? Doar faceți experimentul pentru a-l vedea: de aproximativ două ori din trei, veți câștiga pariul pariat pe aceeași culoare vizibilă, în timp ce pariați pe cealaltă culoare veți câștiga o singură dată din trei.

Trebuie să recunoaștem că, prin explicația pe care am oferit-o, am intenționat în mod deliberat să vă conducem la un raționament greșit. Aceasta este și o tehnică iluzionistă.

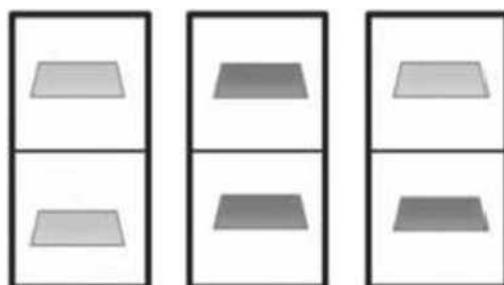
Atenția trebuie întotdeauna deturnată de la truc, atât pentru numerele făcute pe scenă, cât și în jocurile de cărți de masă, la fel ca în ultimul experiment propus. Pentru a face raționamentul corect, să gândim diferit: câte cărți identice există pe cele două părți? Sunt două, nu? Deci, probabilitatea ca, închizând ochii și punând mâna în pungă, să tragem o carte egală pe ambele părți este de $2/3$, față de probabilitatea de a desena una de culoare diferită pe fiecare parte, care este $1/3$. Prin urmare, de $2/3$ ori vom trage o carte cu cele două versouri de aceeași culoare și, deci, dacă vedem că una este roșie, este rezonabil să pariem că partea ascunsă

este roșie. Poate părea ciudat, dar raționamentul este impecabil. Și, chiar dacă nu v-am convins, puteți nota posibilitățile într-un tabel și puteți verifica cum, în practică, acestea sunt de fapt respectate.

Acest joc nu este nou. Este cunoscut sub numele de *paradoxul cutiilor lui Bertrand*, deoarece matematicianul francez Joseph Bertrand a fost cel care l-a definit, în 1888, în cartea sa *Calcul des probabilités*. Versiunea originală folosește cutii și monede în loc de cărți de diferite culori și prevede următoarele:

Avem trei cutii și fiecare are două sertare cu o monedă în interior: într-o cutie sunt două monede de aur, în următoarea două monede de argint și în ultima cutie există o monedă de fiecare tip. O cutie este aleasă la întâmplare și, de exemplu, vedem că conține o monedă de aur. Ce probabilitate avem ca și cealaltă monedă să fie de aur?

Figura 19. Probabilitatea cu cele două monede de aur.



Paralelismul dintre cele două probleme este evident. Versiunea cu cărți se datorează lui Claude Shannon și Warren Weaver.

Este posibil să fi făcut legătura între acest paradox și altul, acum destul de cunoscut sub numele de paradoxul Monty Hali. Menționez pe scurt în ce constă, deși o căutare rapidă pe internet va oferi o imagine de ansamblu generoasă a cărților dedicate acestui subiect. Vorbim despre un concurs de televiziune (al cărui prezentator se numea Monty Hali) în care trebuia să alegeți una dintre cele trei uși pentru

a câștiga premii. Doar în spatele uneia dintre uși a fost
ascunsă o

mașină, alegându-le pe celelalte două, se câștiga o capră. Concurentul alegea una dintre uși. Apoi prezentatorul deschidea una dintre cele două uși pe care concurentul nu le alesese, iar în spatele ei a descoperit o capră; apoi îl întreba: „Ești convins de ușa pe care ai ales-o sau vrei să te răzgândești?” Iată esența problemei: după ce ați deschis o ușă în care există o capră, cu celelalte două aveți șanse de 50% să câștigați mașina, așa că s-ar putea să credeți că este indiferent dacă vă schimbați părerea sau nu. Dar, în realitate, dacă decideți să vă răzgândiți, sunt șanse de două din trei să câștigați mașina (figura 20).

Acest rezultat este contraintuitiv: nu sunt puțini matematicienii iluștri care au greșit calculul, chiar în public. Acest lucru arată că, în mod cert, calculul probabilităților nu este simplu. Trebuie să aveți idei foarte clare, pentru că este ușor să vă fie distrasă atenția și să luați o cale greșită.

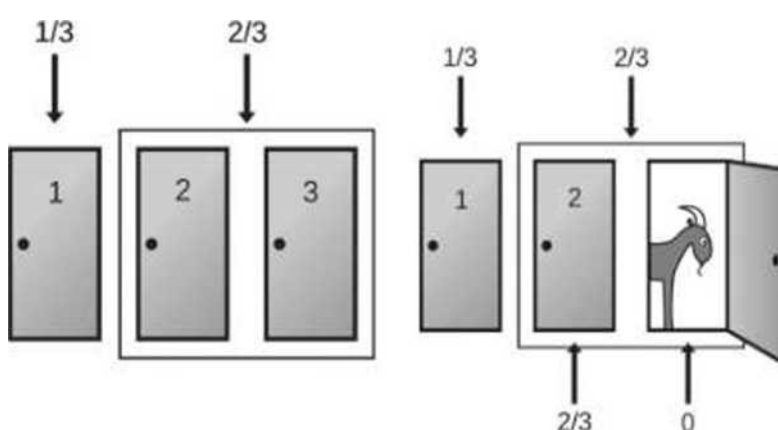


Figura 20. Monty Hall. În spatele uneia dintre aceste trei uși se află o mașină. Concurentul alege ușa numărul 1. Apoi elimină ușa 3. În spatele căreia era o capră. Va fi mașina în spatele ușii 1, prima alegere, sau în spatele ușii 2? Ar trebui să vă răzgândiți? Ei bine, dacă decideți să vă schimbați opțiunea, sunt

șanse de două din trei să câștigați mașina.

Cu această problemă ne înșelăm pentru că uităm că alegerea noastră a fost făcută la început, iar prezentatorul va deschide ușa pe care o dorește.

Să abordăm problema invers:

- dacă am ales ușa care ne face să câștigăm mașina, Monty Hali va deschide oricare dintre celelalte uși și, dacă ne răzgândim, vom pierde;
- dacă am ales una dintre ușile în spatele căreia se află capra, prezentatorul va trebui să ne deschidă ușa unde se află cealaltă capră, astfel încât, schimbând prima noastră alegere, am putea câștiga mașina.

Pe scurt, câștigăm mașina schimbând ușa în două cazuri, în timp ce ar trebui să persistăm în prima alegere doar într-un singur caz.

	SCHIMBA	NU SE SCHIMBA
Alege o ușă cu mașina	PIERDE	CÂȘTIGĂ
Alege o ușa cu capra	CÂȘTIGA	PERDE
Alege ousă cu capra	CÂȘTIGA	PIERDE

Și dacă, făcând pariul, magicianul reușește să creeze confuzia potrivită, cu siguranță vom pierde. Și fără a fi nevoie să ne punem vreo „capcană”, așa cum fac încă unii escroci pe stradă, care îi conving pe trecătorii neatenți să pună bani.

Ochii ne înșală, la fel ca intuiția.

Probabilitate și psihologie

După cum am spus, psihologia are un rol-cheie în rezultatul unui joc de magie (vorbim despre 80%), legat de capacitatea magicianului de a distrage atenția publicului prin schimbarea percepției sale asupra a ceea ce se întâmplă pe scenă.

Jocurile matematice sunt un antrenament excelent pentru oricine este nou în lumea magiei, deoarece, deși sunt rezolvate, nu trebuie să vă faceți griji cu privire la cât de priceput sunteți cu mâinile: jocurile funcționează singure (cel puțin, până la un prim nivel de dificultate) și permit începătorului să se concentreze asupra prezentării jocului: capacitatea de a capta atenția privitorului, de a masca matematica inherentă jocului și de a trezi emoții din partea publicului care, în cele din urmă, este scopul unui spectacol de magie.

Cunoașterea oamenilor și înțelegerea pauzelor care fac parte din comportamentul nostru comun sunt alte elemente utile pentru a juca jocuri de magie matematică. De exemplu, atunci când cereți cuiva un număr, cel mai probabil este că va alege 7. Când întrebați unul între 1 și 5, răspunsul este adesea 3. Aceste informații sunt cunoscute, nu doar iluzioniștilor. Chiar dacă nu-mi place numerologia, este adevărat că 7 este unul dintre numerele care apar de mai multe ori în Biblie; în plus, 7 este unul dintre numerele care sunt alese cel mai des și, la vremea respectivă, diferiții autori ai textului sacru au făcut ceea ce era de așteptat, alegând tocmai acest lucru. De ce exact 7? Cine știe? Ar trebui să întrebi un alt tip de om de știință. Faptul rămâne că 7 este statistic cel mai ales număr. Iar iluzioniștii pot profita de acest rezultat.

Alex Bellos, matematician și jurnalist, a făcut un sondaj pe interne în care a cerut utilizatorilor anonimi să colaboreze, indicând numărul lor preferat și, dacă doreau,

specificând de ce. Din 30 025 de persoane, 2912 (9,7%) au răspuns că numărul lor preferat era 7, urmat de 3 (7,5%), 8 (care este numărul meu preferat, nu știu de ce, poate pentru forma sa), 5 și 13. În timpul lecțiilor de magie matematică cu clasele de li ceu, când, pentru a face unul dintre jocuri, solicit un număr din două cifre (mai mare de 20], sunt sigur că participanții vor alege aproape întotdeauna 69. Poate fi vârsta sau se datorează hormonilor, totuși în jumătate din situații răspunsul este acesta.

Să facem un experiment, doriți să încercați? Răspundeți la întrebările de mai jos, apoi vom comenta împreună rezultatele.

- Gândiți-vă la o carte din pachetul de poker.
- Gândiți-vă la un număr între 1 și 60.
- Gândiți-vă la un număr între 50 și 100
- Alegeți una dintre cărțile reprezentate mai jos.

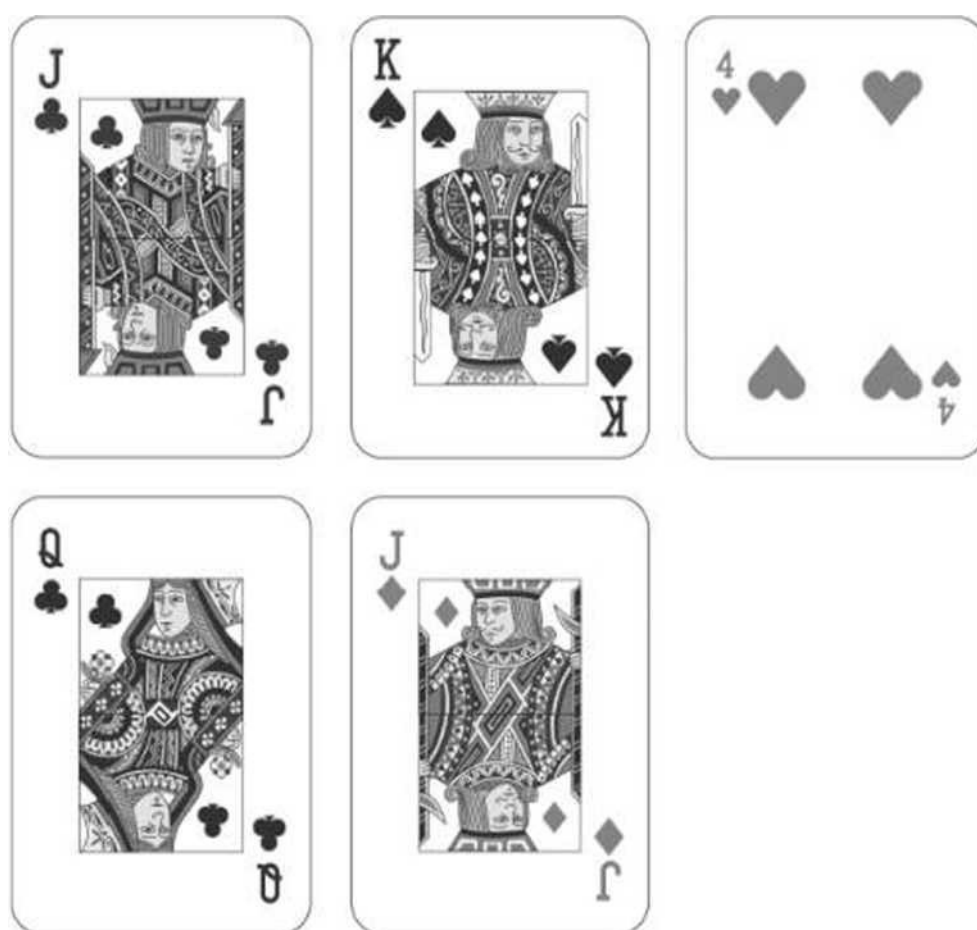


Figura 21.

Să luăm în considerare rezultatele. Majoritatea oamenilor, când li se cere să se gândească la o carte, fără a se limita, vor răspunde asul de pică, dama de cupă, 6 de treflă și 9 de tobă. Numărul mai mic de 60 este de obicei considerat a fi 47. Am făcut propria mea statistică (deși, desigur, eșantionul nu este suficient), iar numărul de apariții al acestui număr este șocant. Un joc este, de asemenea, jucat cu cărțile pentru ghicire, similare cu cele din jocul prezentat în primul capitol, în care un spectator este rugat să se gândească la un număr, să spună în care dintre tabele se află și să se concentreze pe număr pentru a-l comunica pe cale telepatică. În mod normal, când fac acest joc și numărul „îmi vine în minte”, îl scriu într-un caiet pentru a-l arăta publicului, dar de multe ori nici nu trebuie să scriu pentru că știu deja: este 47. Când se cere un număr mai mare de 50, în

răspunsuri este frecvent 68. În cele din urmă, în alegerea uneia dintre cele cinci cărți, se răspunde de obicei 4 de cupă, deoarece în comparație cu cele 4 figuri este o carte cu puncte, în plus este, în general, plasată în mijloc. Recunosc că am încercat să manipulez alegerea cititorilor. Și experții în marketing sunt, de asemenea, maeștri în aceste strategii.

Elefanți în Danemarca?

Să trecem la un alt joc destul de cunoscut: alegeți un număr de la 1 la 9, orice doriți. Trebuie să înmulțiți acest număr cu 9 și să adunați cifrele care îl compun. Acum împărțiți rezultatul la 2. Dacă nu mai există zecimale, amintiți-vă rezultatul. În caz contrar, eliminați zecimalele rămase. Vom atribui litere numerelor: numărul 1 va fi A, 2 va fi echivalent cu B, 3 cu C, 4 cu D, 5 cu E, 6 cu F, 7 cu G ... Perfect, gândiți-vă la o țară care începe cu litera corespunzătoare numărului rămas înainte. Acum luați în considerare țara respectivă și gândiți-vă la un animal. Gândiți-vă și la culoarea animalului... Așteptați o clipă, nu se poate: nu există elefanți gri în Danemarca!

Lăsând gluma la o parte, jocul nu este garantat să funcționeze 100%, dar aproape. În italiană, doar două țări au un nume care începe cu D: Danemarca și Dominica. Alte animale care încep cu un E, în afară de elefant, sunt hermelina, emu, echidna, heloderma ... Poate că există altele, dar cel care se repetă cel mai mult în răspunsuri este elefantul și este gri. Și, lucru care nu este de trecut cu vederea, acest joc funcționează și în limba engleză.

Magicienii folosesc uneori cinci cărți, cunoscute sub numele de „cărți Zener” sau „cărți ESP”, concepute în 1930 pentru a efectua experimente privind percepția și

clarviziunea extrasenzorială de către psihologul Karl Zener, împreună cu Joseph Banks Rhine. Acesta era un botanist care a fondat parapsihologia ca ramură a psihologiei, convins că efectuarea de experimente ar duce la recunoașterea disciplinei de către comunitatea științifică. Problema este că experimentele efectuate nu respectă condițiile metodei științifice. Rhine a vrut să-și repete experimentele, dar a obținut întotdeauna rezultate opuse, așa că le-a repetat mereu. În orice caz, iluzioniștii, în special așa-numiții „mentaliști” continuă să se folosească de desenele acestor cărți atunci când vor să se refere la transmiterea gândului în dezbaterile despre jocurile de magie.

Pentru jocul care urmează vom avea nevoie de un zar, o ceașcă, un desen cu simbolurile lui Zener, plus un alt simbol, care ar putea fi foarte bine un hexagon. Le vom reprezenta la rând, asigurându-ne că nimeni nu vede ordinea în care am scris simbolurile. Apoi îi vom cere spectatorului să pună zarurile în ceașcă și să le arunce de mai multe ori, pur și simplu pentru a-i arăta că nu este „trucat”. Următorul lucru de făcut va fi să desenăm, cu titlu de predicție, unul dintre simbolurile de pe o bucată de hârtie, pe care îl vom lăsa în siguranță undeva, unde nu poate fi schimbat, iar apoi îi vom cere spectatorului să pună zarurile în ceașcă, să o acopere cu mâna și să o agite, iar apoi să vadă ce număr a ieșit la aruncarea zarurilor. În acest moment, el trebuie să se concentreze pe simbolul listei care ocupă poziția marcată de zaruri.

Vom face acest lucru deghizându-ne, deoarece nimeni altcineva nu trebuie să vadă în ce ordine sunt plasate desenele (de exemplu, dacă aruncând zarul iese un 2, va trebui să se concentreze pe pătrat, al doilea desen din listă].

S-ar putea întâmpla (de fapt, se întâmplă cu o probabilitate de 1/6) ca predicția pe care am făcut-o să corespundă simbolului văzut de spectator. În acest caz, jocul este făcut, deoarece ne-am fi demonstrat abilitățile divinatorii (dacă am fi desenat pătratul și ar fi ieșit 2, am fi „demonstrat” că suntem capabili să ghicim). Dar cel mai probabil este că simbolul corespunzător numărului zarurilor aruncate de spectator este diferit de cel așteptat. Dacă acesta este cazul, trebuie să ne adresăm unui alt spectator și să anunțăm că vom citi și în mintea lui. Apoi, trebuie să luăm o altă bucată de hârtie, să desenăm simbolul pe care l-a văzut primul spectator și să-l lăsăm deasupra primei predicții, fără ca acesta să fie văzut. Ceașca este rotită încet, astfel încât zarul să ruleze pe pereți fără să se întoarcă, astfel încât alunecând pe masă să puteți vedea numărul de pe fața de mai jos. Odată ce acest lucru este făcut, privi –

torului i se arată lista, astfel încât să poată vedea simbolul corespunzător numărului care apare pe zar. La final, cele două foi sunt afișate în același timp și cei doi voluntari sunt întrebați dacă văd simbolul la

care se gândiseră. Ambii vor confirma acest lucru.



**Figura 22. Simbolurile
ui Zener, Ideale
pentru jocurile**

De fapt, cei doi văd bucata de hârtie corespunzătoare numărului ales, dar pentru aceasta a fost necesar să le întindem o capcană: atunci când lista simbolurilor este plasată în fața celui de-al doilea spectator, aceasta trebuie afișată în ordine inversă, astfel încât, pentru el, numărul 1 este hexagonul, 2 steaua, 3 crucea, 4 cercul, 5 pătratul și 6 valul.

Trebuie să ne amintim că, pe un zar, suma numerelor situate pe fețele opuse este 7. În cazul nostru, dacă în interiorul ceștii vedem 2, pe fața inferioară a matriței este 5. Extrăgându-l cu atenție, glisând zarul pe pereții cupei, îl vom putea întoarce afișând un 5, care conform listei corespunde pătratului.

Rețineți că dacă adunăm numărul asociat fiecărui simbol atunci când îl arătăm primului spectator cu numărul corespunzător aceluiasi simbol când îl arătăm celui de-al doilea, suma este întotdeauna 7. Deoarece suma punctelor care apar pe laturile opuse ale zarului este 7, ceea ce se întâmplă de fapt este că forțăm cei doi spectatori să aleagă același simbol. Pentru aceasta trebuie să afișați cele două foi în același timp, iar cei doi vor confirma că a lor este prezentă. Publicul, văzând două foi și doi spectatori pe scenă, va crede că fiecare este predicția uneia dintre cele două, dar știm bine că nu este cazul: primul desen făcut ca predicție nu este folosit. După cum am spus, factorul psihologic joacă un rol fundamental în magie și, de asemenea, în magia matematică.

Probabilitatea într-un pachet de cărți

Luați un pachet de cărți, amestecați-le bine și rugați un spectator să se gândească la o carte. Apoi aruncați pachetul în aer și, în funcție de modul în care cade, apucați o carte

între degetul mare și arătător. Apoi, cereți spectatorului să spună la ce carte s-a gândit și să se uite la cartea pe care ați luat-o. Dacă se potrivește, se arată publicului; iar meritele aplauze vor veni. Dar dacă cartea nu este aceeași, veți face o pauză scurtă și apoi veți spune: „Acesta a fost un experiment, cartea

dvs. este aici undeva pe jos” arătând spre podea. Nu este nevoie să o repetați de multe ori, doar de la 1 la 52, dar atunci când funcționează, efectul este cu adevărat uimitor. Și pregătind rolul care va fi jucat bine, puțin umor nu strică, deoarece veți deveni simpatic publicului. De asemenea, începe tot la fel...

William Simon, în lucrarea sa *Mathematical Magic*, citează un joc care poartă numele de „pariu la universitate”, deoarece i-a învățat de la o persoană care a susținut că a câștigat destui bani pe acest pariu pentru a plăti studiile universitare ale fiului. Desigur, aceste pariuri câștigătoare pot fi prezentate ca niște jocuri de mentalism. Nu reușesc întotdeauna (și chiar și în acest tip de reprezentare poți face ocazional câteva greșeli), dar există multe șanse să iasă bine.

Iată întrebarea în toată simplitatea ei: iei pachetul, îl amesteci bine și îl tai, lăsând trei pachete de cărți pe masă, cu fața în jos. Persoana în cauză pariază că într-una din cele trei pachete, cea mai mare carte corespunde unui as, unui valet sau unui patru. Vrei să încerci? Cu toate acestea, amintiți-vă *că frecvențele relative* atunci când desfășurați un experiment abordează probabilitatea numai dacă au fost făcute mai multe repetări; aceasta este ceea ce stabilesc *legile numerelor mari*. În orice caz, am repetat experimentul de trei ori (ceea ce nu este într-adevăr un număr mare) și în niciunul dintre cazuri nu am primit ași, nici valeți și nici măcar patru. Probabilitatea funcționează astfel: trebuie să fim conștienți de faptul că este măsura incertitudinii, iar o secvență care este nefavorabilă pentru noi poate continua să se repete, doar că, insistând, vom obține avantaje.

Să analizăm întrebarea din punct de vedere matematic. În acest scop, o vom formula din nou ca pe o problemă de probabilitate condiționată. Pentru a câștiga pariul cu cea

mai mare carte din primul pachet, avem 12 din 52 de cărți care ne-ar permite acest lucru. Există $40/52$ șanse ca acest lucru să nu se întâmple, dar în acest caz ar mai rămâne $12/51$ pentru a lua una dintre cărțile menționate anterior. În caz contrar, probabilitatea ca una dintre acele cărți să fie prima din

cel de-al treilea pachet, deoarece nu a ieșit din pachetele anterioare, va fi de 40/52 -39/51 -12/50.

Adunând toate aceste informații, putem concluziona că probabilitatea ca prin tăierea cărții superioare a unuia dintre pachete, aceasta să fie un as, un valet sau un patru va fi de:

12	40	12	40	39	12
52	52	51	52	51	50

| *Cu Laplace am câștigat*
| *începem deja să vedem cum unele pariuri se dovedesc a fi*
| *destul de surprinzătoare. Luati pachetul și amestecați din*
| *nou. Ați terminat? Foarte bine. Acum numiți valoarea a*
| *două cărți, fără a menționa culoarea, de exemplu: „damă*
| *(Q) și șapte”. Acum verificați cărțile din pachet uitându-vă*
| *la ele una câte una. Veți vedea cum în anumite puncte ale*
| *pachetului apare o damă lângă un șapte. Ce surpriză!*

| *Ne aflăm din nou într-o situație în care probabilitatea*
| *joacă în favoarea noastră. Amestecând un pachet, ceea ce*
| *facem este să schimbăm ordinea celor 52 de cărți. De*
| *data aceasta vom calcula probabilitatea folosind legea lui*
| *Laplace. Prin urmare, cazurile posibile sunt 52 (numărul*
| *de schimburi între 52 de elemente)! Pentru a număra*
| *cazurile favorabile, să ne gândim la 50 de cărți, aranjate*
| *una lângă alta la rând, cu puțin spațiu între ele. Numărul*
| *de spații goale pe care îl avem este de 51.*

| *Să continuăm plasând în aceste spații goale o pereche*
| *de cărți „valabile”, adică o damă și un șapte. Posibilitățile*

pe care le avem de a pune

Rezultatul acestei operațiuni este de 47/85, care este echivalent cu aproximativ 0,55529.

A sosit momentul să ne amintim ce a spus Cardano: un pariu bun este unul în care șansele sunt în favoarea noastră, dar sunt minime, astfel încât să puteți crede că este un pariu mult mai corect. Pentru un iluzionist, această mică diferență face mai plauzibil ca cineva să fie gata să accepte provocarea.

Un pachet de cărți este cel mai bun pentru a introduce concepte precum probabilitatea și, la rândul său, pune probleme interesante. Perși Diaconis, care înainte de a fi statistician era iluzionist, a publicat *o damă și un șapte în primul spațiu sunt 32: dacă ordinea este damă-șapte sunt 16 posibilități: patru opțiuni de semne pentru damă și alte patru pentru șapte; dacă ordinea în care apar este de șapte-damă, avem tot 16 posibilități. Dar acest lucru se poate întâmpla în oricare dintre cele 51 de spații. Odată stabilite cele două cărți care ne vor obliga să eliberăm un caz favorabil, ne rămân 50 de cărți de aranjat în spațiile goale, astfel încât rezultatul final al cazurilor favorabile va fi: $32 \cdot 51 \cdot 50!$ Și, prin urmare, probabilitatea ca acest lucru să se întâmple este:*

$$\frac{32 \cdot 51 \cdot 50!}{52!} \approx 8 \cdot 10^{-13}$$

sau mai degrabă un număr destul de considerabil: 0,6153.

Cu acest pariu, omul care l-a introdus pe William Simon în joc i-ar fi putut plăti fiului său nu doar facultatea, ci și un mașter!

PERȘI DIACONIS

Perși Warren Diaconis ('945) este un alt matematician atipic, de asemenea, un fan al magiei. La vârsta de paisprezece ani, l-a întâlnit pe magicianul canadian Dai Vernon (cunoscut sub numele de „Profesorul”) și, ca fiind interesul lui Perși pentru magie, iluzionistul l-a invitat să-l însoțească la spectacolele sale din diferite orașe din Statele Unite. Diaconis a plecat fără să ceară măcar permisiunea părintească și fără să-și termine școala. După doi ani de turnee, a început să facă spectacole pe cont propriu.

În timpul spectacolelor sale și-a dat seama că matematica (în special statistica și probabilitățile) era foarte utilă în jocurile de magie. Cu spectacolele sale a reușit să plătească pentru un curs la universitate. După absolvire, și-ar fi dorit să-și continue studiile, dar erau puține locuri disponibile. Apoi, Martin Gardner a intrat în scenă, recomandându-l lui Frederick Vosteller, ce asemenea pasionat de magie, care la acea vreme conducea Departamentul de Statistică de la Universitatea Harvard. Aici Diaconis și-a urmat masteratul și apoi și-a obținut doctoratul.

Pe lângă jocurile sale de cărți, Diaconis a devenit celebru datorită capacității sale de a arunca o monecă făcând să iasă de mai multe ori cap decât pajură. În realitate, este o tehnică a iluzionistului, care demonstrează, totuși, fiabilitatea mașinilor care aruncă monece și care amestecă repetat cărțile. Sunt tehnici bazate pe metode statistice pentru rezolvarea problemelor practice.

Împreună cu Ron Graham, Diaconis a scris minunata carte *Magical Mathematics. The Mathematical Ideas that Animate Great Magic Tricks*.

numeroase articole științifice despre acest subiect, scriind, de asemenea, o minunată carte numită *Magical Mathematics*. Cu toate acestea, el nu a fost primul care s-a ocupat de matematica ascunsă în amestecarea cărților;

Edgar Gilbert și Claude Shannon (și, în mod independent, Jim Reeds) au venit cu un model adecvat pentru a descrie modul în care amestecăm cărțile. Acești oameni de știință au vorbit despre așa-numitul *amestec în stil american*, în care pachetul se împarte în două, în care se amestecă alternativ cărți dintr-un pachet în altul. Ipotezele modelului sunt că, împărțind cărțile în două pachete, ambele vor conține mai mult sau mai puțin același număr de cărți, conform unei distribuții binomiale, astfel încât probabilitatea ca o carte din pachetul din dreapta să ajungă în acel moment în pachetul amestecat se obține împărțind numărul de cărți rămase în pachetul din dreapta la numărul de cărți pe care le avem între cele două pachete în acel moment. Acestea sunt presupuneri rezonabile, iar modelul funcționează destul de bine.

Folosind acest model, Dave Bayer și Perși Diaconis au introdus o măsură pentru a defini dezordinea unui pachet. Lucrând cu modelul matematic pentru amestecul în stil american, cei doi cercetători au ajuns la concluzia că cea mai mare dezordine din pachet este atinsă după ce se amestecă de șapte ori. Acest lucru nu înseamnă că după continuarea amestecării scade dezordinea din pachet, ci că aceasta rămâne similară cu cea obținută după amestecarea de șapte ori. Articolul în care Bayer și Diaconis și-au ilustrat dovezile („Trailing the dovetail shuffle to its lair”, publicat în revista *The Annals of Applied Probability* în 1992) este un text matematic oarecum dificil, dar demn de remarcat pentru influența sa deosebită în alte domenii îndepărtate ale științei. De fapt, înainte de publicarea sa prin canalele oficiale ale literaturii științifice, articolul suscitase deja multe reacții și fusese chiar recenzat în *New York Times*, ceea ce rareori este cazul. Cu acea ocazie s-a vorbit despre procesul Diaconis, care, lucrând cu Jim Reeds, obținuse o

aproximare a numărului de amestecări necesare pentru a avea un pachet perfect. Ceva mai târziu, în colaborare cu David Aldous, Diaconis a redus cota maximă la doar 12 ori și, în cele din urmă, cu Bayer a făcut să iasă toate numerele stabilind că numărul magic era de 7 amestecări. Din acel moment, regulile cazinoului s-au schimbat: înainte un pachet se amesteca, cel mult, de trei ori, iar când se ajungea la cinci părea deja prea mult, dar erau oameni care câștigau bani pentru asta; astăzi folosim mașini care amestecă automat pachetul. Este curios să observăm cum, în 2013, Diaconis, împreună cu Jason Fulman și Susan Holmes, au abordat din nou problema publicând în aceeași revistă o analiză a comportamentului angajaților cazinoului care amestecă cărțile, „Analysis of casino shelf shuffling machines”: de fapt, de multe ori, când amestecau cărțile, arătau ca adevărați iluzioniști, iar un cazinou nu își poate permite să dea această impresie.

Coincidențe

Continuând în acest capitol, ne uităm la exemple care ne arată că nu suntem obișnuiți să abordăm corect probabilitățile. Am văzut că există paradoxuri probabilistice și cum se folosește avantajul oferit de probabilități în jocurile de pariuri și cărți. Și, chiar și în viața de zi cu zi, ne confruntăm cu multe coincidențe, fapte care par improbabile, dar nu în totalitate.

Să ne imaginăm că suntem într-o cameră în care se ține un spectacol de magie pentru un public restrâns, să zicem, de exemplu, 50 de persoane; iluzionistul intră și anunță că are un presentiment: doi dintre oamenii din sală își sărbătoresc ziua de naștere în aceeași zi. Începeți să treceți printre cei prezenți cerându-le să-și spună ziua de naștere și,

de asemenea, să prezinte în cazul în care data lor coincide cu cea a altcuiva. La scurt timp, o persoană din public spune că ziua lui coincide cu cea pe care tocmai a auzit-o. Magicianul mulțumește pentru aplauze, spectacolul poate continua.

Jocul tocmai descris se bazează pe o problemă matematică cunoscută sub numele de *paradoxul zilei de naștere*. Personal, folosesc o versiune a acestui paradox la clasa mea de magie matematică și funcționează destul de bine; vom vorbi din nou. Mai întâi introducem problema în versiunea mai clasică: „într-un grup de 23 de persoane

exista o probabilitate de 50% ca doi din grup să aibă ziua de naștere în aceeași zi” La prima vedere, acest lucru poate fi surprinzător, presupunând că vorbim despre doar 23 de persoane și că zilele anului sunt 365. Dar, dacă acordăm atenție, începem să vedem că nu este atât de ciudat. Această „coincidență” se bazează pe un principiu matematic. De exemplu, putem calcula numărul de cupluri care se formează printre aceste 23 de persoane. Calculând numărul de combinații de 23 de elemente și luându-le doua câte două, vom vedea că există 253 de posibilități de potrivire. Pe de altă parte, probabilitatea ca într-un cuplu zilele de naștere să fie diferite este de 364/365, deci probabilitatea ca acest lucru să se întâmple pentru cele 253 de perechi de persoane este:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253} \approx 0,49$$

Adică, probabilitatea de a coincide câteva zile de naștere este egală cu: $1 - 0,4995 = 0,5005$, chiar mai mare de 50%.

Daca în loc de un grup de 23 de persoane, avem unul din 50, combinațiile sunt 1225, prin urmare probabilitatea apariției unei coincidențe este:

$$1 - \left(\frac{365}{365}\right)^{1225} \approx 1 - 0.0347 = 0.9653$$

Aceasta înseamnă că magicianul, făcând o astfel de afirmație, nu riscă prea mult

Mai multe articole tratează studiul problemelor legate de acest paradox, de asemenea, prin raportarea dimensiunii grupului la numărul

de coincidențe care pot apărea în aceeași zi; adică indică faptul că nu numai doi oameni s-au născut în aceeași zi, ci chiar trei sau mai mulți.

Versiunea pe care o folosesc funcționează cu un public larg. De obicei, iese bine cu 120 de oameni. Am greșit o singură dată (deși am recunoscut că nu am un număr mare de raportat, deoarece nu am repetat suficient experimentul]. În mod normal aleg opt persoane și spun ca una dintre ele are ziua de naștere în aceeași zi cu un alt spectator din public. După cum am spus, funcționează destul de bine. Ar trebui să facem niște calcule, dar sunt chiar mai complicate decât cele anterioare.

Să schimbăm scenariul. Să presupunem că participăm la un spectacol de mentalism și că magicianul te alege ca protagonist: se uită la tine cu atenție, face o pauză și apoi începe să-ți descrie personalitatea cu aceste cuvinte:

Îți place să fii iubit și admirat de ceilalți și ești critic față de tine. Deși suferi de unele slăbiciuni, de obicei reușești să le compensezi. Ai un mare talent, dar încă nu-l exprimi. Față de cei din jur ești o persoană politicoasă și capabilă să păstrezi controlul, de multe ori ești îngrijorat de ceva și te simți nesigur. Uneori îți pui la îndoială deciziile, nu știi dacă acestea sunt cele potrivite de luat și nici dacă ai făcut tot posibilul. Îți place să te schimbi și să ai multe oportunități, când ți se pun obstacole te simți limitat și suferi din cauza asta. Îți place să gândești singur și nu crezi necondiționat ceea ce spun alții. Nu pare înțelept să fii complet sincer și să te deschizi altora. Uneori ești extrovertit, disponibil și sociabil, alteori ești singur, fiind rezervat și precaut. Ambițiile tale tind să nu poată fi atinse.

Acum trebuie să dai o notă de la 0 la 5: cât de potrivită este descrierea iluzionistului pentru caracterul tău?

Aș putea chiar să ghicesc nota pe care urmează să o dai, dar,

pentru a nu influența pe nimeni, o scriem mai târziu. Este sigur să pariez

COLM MULCAHY

Colm Mulcahy este un pasionat de magie matematică care poate face magie adevărată cu citre. Nu este surprinzător că, în 2013, a publicat cartea *Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects* în care, așa cum indică titlul, sunt propuse 52 de noi jocuri de magie matematică. Colm este expert în algebră, geometrie și teoria avansată a numerelor. Jocurile sale se bazează pe o matematică complexă, condimentată cu doze bune de umor.

Prezentarea jocurilor sale este întotdeauna foarte exactă și, mai mult, Mulcahy face parte din „Ring 9”, un grup de iluzioniști din Atlanta, unde își are reședința. În 1997, Mathematical Association of America i-a acordat Premiul Allendoerfer pentru un articol popular pe care l-a scris despre ondule (undine) sau *wavelet*. După acest episod, a redescoperit opera lui Martin Gardner și, recitind lucrările sale, a luat naștere interesul pentru jocurile de cărți matematice. Fiind în anturajul altor iluzioniști, care începuseră să exerseze de tineri și care erau „capabili să schimbe un as cu o cupă pentru o damă cu pică fără ca eu să am o idee despre cum au făcut-o”, l-a orientat către tipul de magie care trebuie să fie folosit exploatând arma sa secretă: matematica.

În prezent, colaborează pe scară largă cu mai multe bloguri, inclusiv cu cele ale *Scientific American*, *Huffington Post* și *Mathematical Association of America*. Contribuțiile sale apar și pe alte canale de comunicare, inclusiv pe *New York Times*.

că nota este mare, nu? În mod curios, există multe coincidențe între acest text și ceea ce credem despre noi

înșine. Este normal, a fost scris intenționat pentru a obține acest rezultat. În realitate nu suntem atât de speciali și funcționăm urmând anumite tipare. Personalitatea noastră urmează, de asemenea, anumite tipare, motiv pentru

care facem deseori aceleași greșeli. Mai mult, în unele cazuri, astfel de tipare sunt comune membrilor aceluiași grup.

Textul a fost elaborat de psihologul Bertram R. Forer în 1948 cu fraze preluate din diferite horoscopuri. Intenția sa a fost să explice modul în care funcționează anumite „arte divinatorii” și modul în care indivizii spun dacă o descriere se potrivește cu personalitatea lor. În experimentul realizat de Forer, chestionarul a fost livrat participanților susținând că a fost personalizat pentru fiecare dintre ei. La sfârșitul experimentului, s-a spus că a fost un text care a preluat expresiile tipice ale horoscopului și că era același pentru toată lumea. Evaluarea medie a participanților a fost de 4,26, ceea ce corespunde unui nivel destul de ridicat de uniformitate. Calculele matematice au confirmat experimentul. De atunci a fost repetat de multe ori și întotdeauna cu rezultate similare.

Statistici și magicieni

Am văzut cât de des coincidențele nu sunt, de fapt, coincidențe. În această secțiune vom vorbi despre un joc cunoscut sub numele de *contul lui Kruskal*. Coincidența este că în statistică există o teoremă importantă cunoscută sub numele de *testul Kruskal-Wallis*. Ei bine, Kruskal care a conceput acest mod de numărare nu este același cu autorul teoremei. Experții în teoria grafurilor ar putea crede că Kruskal este autorul algoritmului folosit pentru a găsi un arbore minim de acoperire, dar nici acest lucru nu este adevărat. Lucrul surprinzător (sau, poate, nu chiar atât de surprinzător) este că toți acești Kruskali erau frați. Martin David Kruskal a inventat un joc ideal pentru a obține ceva experiență.

Pentru a juca jocul, trebuie să alegeți un cuvânt din primele rânduri ale textului care urmează, să numărați literele pe care le are cuvântul și să mergeți înainte tot cu același număr de litere. Când ajungeți la cuvântul următor, numărați literele și, din nou, mergeți

înainte cu același număr. Și așa mai departe, până când ajungeți la ultimul cuvânt peste care nu se poate trece (de exemplu, începând cu cuvântul „s-cuola” deoarece are șase litere, următorul cuvânt ar fi „la”, care are două litere și ar duce la „alle”, „del”, „nelle”...).

Putem să ne folosim de celebrul principiu din romanul *Solitudinea numerelor prime* al lui Paolo Giordano, scriitor, dar și doctor în fizică teoretică. Vorbind despre acest joc, mi s-a sugerat să folosesc acest text și trebuie să recunoaștem că se potrivește foarte bine în contextul nostru, deoarece, cu romanul său, Giordano a câștigat Premiul Strega și cine se poate ocupa de magie mai bine decât o vrăjitoare?

Rețineți că există mai multe posibilități inițiale. Trebuie să urmați instrucțiunile și... Nu calculați greșit!

Alice Della Rocca ura școala de schi. Ura să se trezească la șapte și jumătate dimineața chiar și în vacanța de Crăciun, iar tatăl ei se uita la ea la micul dejun și își mișca piciorul nervos sub masă, ca și cum ar fi spus: grăbește-te. Ura colanții de lână care îi înțepau coapsele, mănușile care nu-i lăsau degetele să se miște, casca ce îi zdrobea obrazii și o înțepa cu fierul în maxilar și apoi cizmele alea, întotdeauna prea strânse, care o făceau să meargă ca o gorilă.

După ce ați făcut calculele, veți fi ajuns la cuvântul „să meargă”, nu-i așa? Cu alte texte, nu ajungeți întotdeauna la același cuvânt, indiferent de punctul de plecare. Cu toate acestea, de obicei, există un cuvânt cu care este probabil să se potrivească. Pentru a înțelege de ce funcționează, trebuie să ne concentrăm asupra faptului că, de cele mai multe ori, cuvântul la care ajungem trebuie să fie unul dintre ultimele zece (nu întotdeauna, dar foarte rar există cuvinte cu mai mult de zece litere, deci putem să-l luăm de la sine înțeles) și, cel mai important, dacă textul este suficient de lung,

indiferent de cuvântul cu care începem, ne vom asigura întotdeauna că secvențele cuvintelor se suprapun:

Alice -> școală -Ha -> de -> în -> al său -* la -> mic dejun ...

A lui -> de -> ura -> mijlociu -> vacanță -> la -> mic dejun ...

Observăm cum, după câțiva pași, ajungem la același cuvânt. După acesta, ambele secvențe vor continua în același mod.

Magie¹.

Capitolul 4

Codificare: știința ascunderii

și comunicării secretelor

Coduri în magie

Jean Eugène Robert-Houdin, în cartea sa *Confidences d'un prestidigitateur, une vie d'artiste*, povestește despre succesul pe care îl avea în spectacolele sale un joc pe care îl făcea împreună cu fiul său de 14 ani Émile, numit *vedere dublă*. Jocul nu era o invenție proprie, deoarece Joseph Pinetti îl făcea deja cu soția sa, dar Robert-Houdin l-a făcut celebru aducându-l în marile teatre. Practic, numărul a constatat în a cere publicului să i înmâneze diverse obiecte, în tăcere, în timp ce Émile stătea pe scenă, legat la ochi. Tatăl l-a întrebat pe fiul care este obiectul, iar băiatul a reușit să ghicească și a reușit să descrie și proprietarul obiectului. Robert-Houdin spune că în timpul primei reprezentații publicul nu părea prea entuziasmat de joc, dar a decis să îl includă în repertoriu a doua zi, cu un succes bun. Trucul a funcționat atât de bine încât mulți spectatori au crezut că proprietarii obiectelor erau complici, iar acest lucru i-a redus efectul

în realitate, nu a existat niciun complice, Iluzionistii buni nu fo-

losesec de obicei aceste mijloace (totuși, există și în prezent „magicieni” care nu își fac probleme]. Folosirea de complici în magie este

JEAN EUGÈNE ROBERT-HOUDIN

Robert-Houdin (1805—1871) este considerat „tatăl magiei moderne”. A lucrat ca ceasornicar și într-o zi a cumpărat o carte crezând că este vorba despre ceasuri. O greșeală care i-a schimbat viața, deoarece conținea multe distracții de natură științifică și jocuri de magie. După multe ore de repetiție, a reușit să interpreteze perfect întregul repertoriu al lui Finetti, care până atunci era considerat cel mai bun magician din lume.

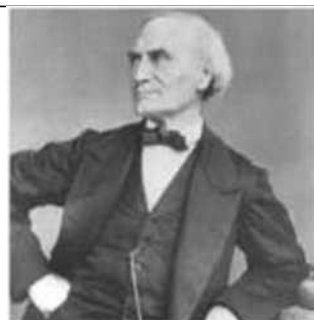


Figura 23.
Robert-

Robert-Houdin a adus pe scenă electricitate, magnetism și alte fenomene proprii științei. Era priceput din punctul de vedere al tehnologiei, datorită meseriei sale. De asemenea, a construit mai multe automate, cum ar fi un portocal celebru care a crescut pe scenă și a inventat cocuri pentru a îmbunătăți jocurile de magie care implică un iluzionist și un medium.

A publicat câteva cărți, dintre care cea mai importantă este *Confidences d'un prestidigitateur, une vie d'artiste*, dar a atins și alte subiecte legate de magie și știință. În carte, el povestește despre perioada în care a fost ambasador în Algeria și despre cum a folosit magia (practic, un joc bazat pe un electromagnet; pentru a face oamenii să creadă că are puteri magice. A avut chiar probleme cu autoritățile franceze și, pentru aceasta, a fost nevoit să-și cenzureze câteva trucuri. Este cunoscut în cartea sa *Magie et physique amusante*.

Povestea memoriilor sale a ajuns în mâinile tânărului Erich Weisz, deja pasionat de magie, care a exercitat o mare influență asupra lui, într-o asemenea măsură încât și-a ales ca nume de scenă Harry Houdini, în onoarea lui Robert-Houdin. Acest băiat a devenit unul dintre cei mai mari maeștri din istorie în deschierea dispozitivelor de securitate, considerată contrarie eticii

profesionale și nu este o practică bine văzută. În realitate, această „tehnică” discreditează iluzionismul, ducând la convingerea că apare în toate jocurile de magie, în timp ce, de fapt, un număr de iluzionism necesită muncă grea, multă ingeniozitate și mult antrenament. Recent, în timp ce eram la metrou, am auzit întâmplător o discuție despre un iluzionist care a folosit complici în spectacol: cineva a comentat cu un vecin că a participat la spectacol și i s-a părut atât de excepțional încât s-a întors și săptămâna următoare, când a fost dezamăgit văzând aceiași „colaboratori aleși din audiență” ca și în spectacolele anterioare. Probabil că această persoană, înșelată fiind, nu se va mai întoarce niciodată să vadă un spectacol de magie. Ceea ce este o adevărată rușine.

Jocul dublei vederi, așa cum am spus, nu folosea complici: Jean Eugène și Émile conveniseră asupra unui sistem complex de coduri. Acest sistem a făcut posibilă identificarea secretă a o sută de obiecte diferite, numai datorită cuvintelor folosite și a modului în care a fost pusă întrebarea. Tatăl și fiul au început să joace în acest joc și de atunci a fost dezvoltat în multe versiuni, inclusiv într-o cheie comică. Este posibil ca cititorii să fi văzut un spectacol în care un magician întreabă un medium despre un obiect pe care nu-l vede și îl ghicește. O conversație ipotetică ne poate da o idee despre modul în care funcționează metoda „dublă vedere”. Dialogul dintre magician și medium ar putea fi acesta:

- Aici sunt cei care au văzut bine ceea ce ani luat eu... Și tu?
- O cheie. (*Coincidența este fonetică*).
- Doar o clipă... Destul de lungă pentru a alege altceva, ce anume?

- Un ceas. (*Ni se dă indiciul prin cuvântul „clipă”*).
- Utilizează-ți puterea și ghicește ce am în mână.
- 0 monedă (*în acest caz se folosește un cod*).

Aceste exemple sunt suficiente pentru a vedea cum putem codifica, într-un mod simplu, unele obiecte prin propoziții. Pentru a face acest lucru, trebuie să fii abil în improvizație și să ai o memorie bună. De exemplu, „Ce am în mână?” se poate referi la o monedă, în timp ce „Ce este?” ar putea indica faptul că privitorul ne-a dat un telefon mobil. Aceste întrebări pentru public nu au un sens ascuns: folosite rapid în modul corect, corespund unui cod precis stabilit de iluzioniști. Și familia Robert-Houdin, dorind să perfecționeze efectul, a mers chiar mai departe reușind să comunice fără cuvinte. Din moment ce spectatorii puteau ghici că în spatele frazelor se afla un cod între tată și fiu, au început să propună numărul folosind doar un clopot. Prin urmare, Jean Eugene nu i-a pus lui Émile nicio întrebare: de fiecare dată când cineva i-a dat un obiect, a sunat la sonerie și fiul său a dat răspunsul. O formulă cu adevărat originală, care l-a făcut un număr unic.

Când mai mulți iluzioniști interacționează pe scenă, ei folosesc un cod pentru a-și transmite informații reciproc. Și trebuie să o facă la momentul potrivit, pentru a nu trezi suspiciuni. De exemplu, s-ar putea spune acest lucru:

- Ești gata?
- Desigur.
- Văd că ai o carte roșie.
- Da.
- Roșie și, în special, de tobă.
- Este adevărat.
- Mă concentrez asupra cărții... încep să o văd... Cartea ta este 7 de tobă.

În acest caz, ei folosesc un cod de bază 4. Cu acest limbaj de coduri am putea ghici orice carte dintr-un pachet de 64 de cărți. Calculul este simplu: $64 = 4^3$, iar noi facem trei întrebări pentru care există patru răspunsuri posibile. Am putea păstra o ordine pentru răspunsuri, astfel: „Așa este”, „Da”, „Este adevărat”, „Desigur”. Dacă vrem, putem asocia aceste răspunsuri cu cifre de la 1 la 4. De asemenea, va trebui să păstrăm o comandă pentru semne, care ar putea fi: pică, cupă, treflă și toba. Magicianul și mediumul care îl asistă au fost de acord că prima întrebare va dezvălui semnul. Deoarece primul răspuns al mediumului este cuvântul „Sigur” al patrulea pe lista noastră, putem deduce că, bineînțeles, semnul este tobă. Având aceste informații, putem să continuăm. Deci, să ne gândim la o matrice de patru rânduri și patru coloane, unde vom insera cărțile, O vom completa rând pe rând. Situația care apare este următoarea:

		1	2	3	4
1	A	2	3	4	
2	5	6	7	8	
3	9	10	J	Q	
4	K				

Următorul răspuns ne va oferi indiciul pentru a înțelege în ce rând se află valoarea cărții pe care mediumul este pe cale să ne spună, iar ultimul răspuns ne va arăta coloana. Procedând astfel, „Da” și „Este adevărat” corespund perechii (2,3) , adică celei de-a treia cărți din al doilea rând, care este 7, Am folosit coduri pentru a comunica informații utile.

Coduri și minciuni*

Nu avem nevoie de coduri doar pentru a păstra informațiile

ascunse, ci și pentru a verifica dacă informațiile au fost transmise corect. Deci pot funcționa ca un indice al minciunilor. Să analizăm acum unul dintre jocurile de magie pe care le-am selectat.

Magicianul intră în scenă și aduce cu el o tablă magnetică. Arată publicului niște magneți dreptunghiulari roșii și galbeni. Apoi alege un spectator și îi cere să compună un dreptunghi mare, cu magneții de culoarea pe care o prefera, aranjându-i după bunul plac, organizați în rânduri și coloane și folosind numărul necesar de magneți. După ce privitorul a satisfăcut toate cererile, pentru a complica puțin lucrurile, magicianul adaugă un rând și o coloană. Se uită cu atenție la figura în ansamblu și spune că a memorat dispunerea culorilor, fără a uita să reamintească publicului numărul posibil de variații ale acestor dreptunghiuri colorate. Pentru a-și demonstra talentul, iluzionistul îi cere spectatorului să aleagă un magnet și să-l schimbe cu unul din cealaltă culoare. În timp ce spectatorul îi urmează instrucțiunile, magicianul va sta în spate. Când totul este gata, magicianul se întoarce, observă aranjamentul și indică ultimul magnet schimbat de spectator.

Este păcat să dezvăluim trucul imediat, dar nu ne putem descurca fără el. Dacă doriți, puteți face o pauză și vă puteți acorda timp pentru a ajunge la o explicație pe cont propriu sau puteți citi soluția imediat. Pentru simplitate, în loc să folosim culorile roșu și galben, vom folosi simbolurile 0 și 1. Desigur, matematica care stă la baza raționamentului rămâne aceeași, dar este mult mai ușor să scrieți în acest fel și, poate, se dovedește a fi mai simplu de înțeles.

0 0 0 0 1 1
0 1 1 0 1 0
0 0 0 1 1 0
0 1 1 0 1 1
1 1 1 0 1 0

110 110
0 0 0 0 1 0

Magicianul trebuie să adauge un rând și o coloană ca aceasta:

```

O O O O 1 1 o
0 110 10 1
0 0 0 1 1 0 o
O 1 1 O 1 1 o
1110 10 o
110 110 o
0 0 0 0 1 0 1
0 0 10 10 0

```

El trebuie să o facă astfel încât să pară aleatoriu (sau cel puțin acesta este scopul) adăugând cifre zero și unu: scopul este de a face numărul de magneți din fiecare rând sau coloană egal. În acest fel, este foarte ușor să recunoaștem punctul în care unul dintre cele două simboluri se schimbă; de fapt, în rândul respectiv și în acea coloană regulile parității nu se vor respecta. Doriți să încercați să aflați ce element s-a schimbat în următoarea matrice?

```

0 0 0 0 1 1 0
0 110 10 1
0 0 0 1 1 0 0
0 110 11 0
111110 0
110 110 0
0 0 0 0 1 0 1
0 0 10 10 o

```

Așa este, elementul modificat se găsește în al cincilea rând și în a patra coloană. Felicitări, ești foarte bun ca magician matematician. Ceea ce ați făcut a fost să folosiți un cod care este adesea folosit pentru a detecta erorile. Ceea ce magicianul adăugase la sfârșitul fiecărui rând și coloană era un bit de paritate. Este important să detectați greșeli în timp ce comunicați

informații. Un sistem poate fi configurat cu

paritate pară sau paritate impara, dar, pentru a evita greşelile, se va lucra întotdeauna cu acelaşi tip de paritate, ın exemplul nostru am lucrat cu o paritate para, presupunând că alegem sa avem întotdeauna un număr par pentru fiecare. ın programare sau ın teoria informaţiei, este important să se detecteze dacă exista o eroare ın transmisie ın anumiţi biţi. Astfel, vom scoate la iveala eroarea din numărul impar de biţi. Cu aceasta putem deduce o eroare ıntr-un număr impar de biţi. Dacă ar exista erori ıntr-un număr par de biţi, nu am putea observa. ın ciuda acestei imperfecţiuni, este destul de puţin probabil ca erorile să apară ın orice biţi. Şi este şi mai rar ca erorile să apară ın- tr-un număr par, astfel că, ın general, sistemul funcţionează destul de bine şi este folosit des.

În timpul unei prelegeri, matematicianul japonez Jin Akiyama a propus o versiune a jocului de tabele de predicţie binară, incluzând un cod pentru a observa erori. Este foarte interesant şi a dat spectatorului şansa de a minţi cu privire la un singur tabel. Tabelele sunt următoarele:

Tabelul	8 9 10 11	12 13 14 15
ABC	4 5 6 9	12 13 14 15
Tabelul AC	2 3 6 7	10 11 14 15
Tabelul BC	13 5 7	9 11 13 15
Tabelul AB	13 4 6	8 10 13 15
Tabelul A	12 5 6	8 11 12 15
Tabelul B	2 3 4 5	8 9 14 15

Primele patru corespund tabelelor binare normale, descrise ın primul capitol (chiar dacă ın acest caz a fost o versiune extinsă: valabilă pentru numere de la 1 la 63, ın loc de numere de la 1 la 15). Ultimele trei tabele au fost adăugate pentru a evidenţia posibilele erori (sau, ın funcţie de această reprezentare a jocului, minciuni). Cum este posibil?

ADA LOVEFACE

Augusta Ada King, contesa de Lovelace (18'5-1852) este consiclerată primul progra- mator de calculator. Tatăl ei era ooetul Lord Byron, iar mama ei a fost cea care a crescut-o, practic, singură: femeia, pasionată de matematică, corea ca Ada să învețe această știință, așa că a încredințat-o mai multor tutori, dintre care unul era William Frend. În 1833, Ada l-a



Întâlnit pe Charies Babbage și a văzut mașina

sa ciferențială.

Babbage asistase la spectacolul Turcului, un automat care aparent juca șan, creat ce Wolfgang von Kempelen.

Știa că Turcul era un truc – automatul era, de fapt, manevrat ce un bărbat – dar era convins că, într-un fel sau altul, mașinile ar putea gândi inteligent. Acest truc magic l-a ceterminat să conceapă mașina diferențială și mașina analitică.

Ada a fost fascinată de mașina diferențială și a lucrat împreună cu Babbage, corectând unele greșeli pe care acesta le făcuse. A scris câteva *Note* despre mașina analitică în care a descris cum să pregătească cîspozitivul pentru a rezolva unele calcule și unele operații în moc independent. Această descriere corespunde cu ceea ce este considerat primul program ce calculator. *Netele* au fost publicate în *Sciertifc Memoires* (traduse în italiană ca *Memorie Scientifiche*), ale lui Richarc Taylor, în care numele Ada Lovelace este ascuns sub acronimul „AAL”.

Babbage s-a străduit să găsească resurse financiare pentru pro- iectul său, Ada nu avea prieteni sau colegi cu care să-și împărtășească interesele științifice și, mai mult, a început să sufere de probleme ce sănătate. Dacă lucrurile nu ar fi mers atât de prost, ar fi putut fi primii care au construit un jucător de șah cu adevărat automat.

Figura 24. Ada Lovelace
în iurul anu|uj •8AQ

ABC AC BC AB A B C

1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	0	1	0	0	1	1
3	0	0	1	1	1	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	1	0
7	0	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1
9	1	0	0	1	0	0	1
10	1	0	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0	1	0
12	1	1	0	0	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	0
14	1	1	1	0	0	0	1
15	1	1	1	1	1	1	1

Prin denumirea primelor tabele, cum ar fi ABCj AC, BC și ABj coloanele A, B și C sunt generate astfel încât să existe pe fiecare rând cel puțin o pereche de numere unu. Astfel putem calcula dacă spectatorul minte sau nu și, de asemenea, putem afla unde.

Să presupunem că spectatorul ne spune că numărul său este în tabelul ABC, în AC în A, în B și în C. Numărăm numărul A, B, C care apare acolo unde ne-a spus:

- Sunt 3 A (în ABC, AC și A).
- Sunt 2 B (în ABC și B).
- Sunt 3 C (în ABC, AC și C).

După cum putem vedea, există cantități impare de A și de C, care nu coincid cu hitul de paritate pe care l-am stabilit. Prin urmare, spectatorul ne-a mințit în tabelul AC (sigur, dacă nu ar fi în AC, am elimina un A și un C și toate cantitățile ar deveni egale în acel moment). Din

Ghicirea în mod binar

Un alt exemplu: să spunem că numărul la care mă gândesc acum se află în AC, AB, B și C. Reușiți să intuiți care este? Este suficient pur și simplu să vă concentrați asupra faptului că fiecare literă este prezentă în număr par, așadar nu a fost spusă nicio minciună. Acum, să ne concentrăm asupra expresiei binare și să vedem că ar fi 0101, ceea ce corespunde numărului 5. Am ghicit? Felicitări!

moment ce ni s-a spus că se află în AC și este o minciună, devine clar că numărul nu se găsește acolo.

Acum să ne concentrăm pe coloanele originale: ABC, AC, BC și AB, care ne dau expresia binară a numărului ales. Dacă le reprezentăm prezența/absența cu 1 și, respectiv, 0, vom vedea că expresia binară a numărului gândit este 1000 și, datorită acestui fapt, știm că numărul este 8 (în baza 10).

Principiul lui Gilbreath

Sunt mulți matematicieni pasionați de magie, ca și mine. Unii se limitează la a face doar numerele inventate de alții, dar uneori iese la iveală o idee care pare a fi făcută să devină un joc de magie, iar iluzionistii o folosesc în spectacolele lor. Acest lucru i s-a întâmplat cu siguranță lui Norman Gilbreath, matematician, informatician și iluzionist. Gilbreath a formulat un principiu care guvernează amestecarea cărților și care permite minuni. Există mai multe numere efectuate de magicieni profesioniști care se bazează pe principiul lui Gilbreath și, ca întotdeauna,

prezentarea este fundamentală: ascunderea a ceea ce este prezentat are o bază matematică.

Să facem un experiment. Este cu adevărat uimitor și, pentru a reuși, este nevoie să exersați manevrarea pachetului în timp ce aveți grijă și de prezentare. Trebuie comandat un pachet pentru a alterna cele două culori ale cărților: ROȘU - NEGRU - ROȘU - NEGRU - ROȘU - NEGRU ...

Acum tăiați pachetul în două. Trebuie doar să fiți atenți la un lucru: în timpul tăierii, cărțile care apar sub fiecare pachet trebuie să aibă o culoare diferită. În cele din urmă, cele două pachete de cărți trebuie amestecate în stil american. Nu este dificil și nu este necesar să obțineți un amestec perfect. După amestecarea celor două pachete, chiar dacă la început pachetul avea o ordine, nu se mai poate ști culoarea cărților care apar.

Așadar, luați primele două și verificați dacă fiecare are o culoare diferită. Luându-le pe următoarele, veți vedea că acestea au, de asemenea, culori diferite. La fel și cele două care urmează și cele de după aceea... De fiecare dată când trageți două cărți, aveți una roșie și una neagră.

Aceasta este consecința *principiului lui Gilbreath*, care se referă la ordinea parțială păstrată în pachet atunci când se amestecă în stil american. Desigur, când amesteci un pachet în stil american, cărțile provin din pachete diferite, de fapt, puține cărți trec dintr-un pachet și la fel și din celălalt. Configurația finală rezultată este similară cu aceasta:

Figura 25.

Când am spus că toate cărțile de sub cele două pachete trebuie să fie de culori diferite, nu am făcut o recomandare aleatorie, dar am dat cheia pentru a înțelege modul în care funcționează jocul: luând această precauție, ceea ce am obținut este că pachetul de la început avea o secvență ROȘU - NEGRU - ROȘU - NEGRU - ROȘU - NEGRU pachetul de deasupra tăieturii a păstrat ordinea, dar pachetul din partea de jos este în această altă ordine: NEGRU - ROȘU - NEGRU - ROȘU - NEGRU - ROȘU ... Putem vedea că într-unul dintre pachete, cărțile care ocupă o poziție impară sunt roșii, iar cele care ocupă poziția pară sunt negre, în timp ce în celălalt pachet apare opusul: negru pentru poziția impară și roșu pentru poziția pară. Să fim atenți la cele două cărți de mai sus; dacă cele două provin din același pachet, vor avea culori diferite datorită modului în care le-am aranjat, în timp ce dacă fiecare provine dintr-un pachet diferit, vor avea întotdeauna o culoare distinctă, deoarece cartea superioară a fiecărui pachet avea diferite culori. Să eliminăm aceste două cărți. Acum să trecem la următoarele două: dacă cele două cărți pe care le-am eliminat provin mai întâi din același pachet, configurația este aceeași cu cea precedentă (două pachete comandate RNR-NRN ... și NRNR-NR...), în timp ce, dacă am eliminat o carte din fiecare pachet, schimbăm pozițiile: de fapt, acum avem NRNRN ... și RNRNR ..., dar este același lucru. Esența este că toate cărțile care ocupă poziții cu aceeași paritate au culori diferite în fiecare dintre pachete. Am putea continua raționamentul până când pachetul este epuizat, dar chiar și în acest fel putem reda ideea.

Ordonarea după semne

Să luăm în considerare un alt exemplu, puțin mai complicat.

Va trebui să ordonăm pachetul nu numai după culori, ci și după semne; ei bine, vom începe să sortăm cărțile în funcție de o secvență PICĂ (P) – CUPĂ (C) – TREFLĂ (Tr) – TOBĂ (To) – PICĂ – CUPĂ – TREFLĂ – TOBĂ ...

Acum, să punem câteva cărți pe masă, pe rând, trăgându-le din pachetul pe care l-am comandat. Nu este nevoie să distribuiți exact jumătate din pachet, puteți alege numărul de cărți dorite; procedând astfel, pachetul original va fi împărțit în două pachete, care trebuie amestecate în stil american. Odată ce ați făcut acest lucru, trebuie să extrageți cele mai mari patru cărți ale pachetului amestecat. Ați terminat? S-ar putea să fiți surprinși, dar în acele cărți există toate cele patru semne ale pachetului: o carte de pică, o carte de cupă, o carte de treflă și una de toבă. Și asta după amestecare! Nu sună asta a magie? Și nu se oprește aici: verificând grupul următoarelor patru cărți, veți vedea întotdeauna cele patru semne ale pachetului, precum și în restul grupurilor de cărți.

Dacă ați înțeles exemplul făcut cu alternanța culorilor, la fel se întâmplă și aici. Ceea ce facem dând cărțile pe rând pe masă este să inversăm ordinea inițială în noul pachet pe care îl formăm, la fel ca înainte de a tăia pentru a vedea cărți de diferite culori (de fapt, chiar înainte de a fi putut da cărțile pe masă una câte una, obținând același efect). Ideea este că vom amesteca două grupuri de cărți: prima, formată din cărțile care rămân de distribuit pe masă, unde se menține ordinea PCTrToPCTrTo ... Fără a începe neapărat cu pică, acest lucru va depinde de cărțile pe care le-am lăsat în pachetul eliminat; iar al doilea, cel al cărților eliminate, a cărui primă carte va fi antecedentul primei din celălalt pachet în ordinea PCTrToPCTrTo. De exemplu, situația ar putea fi aceasta:

(1)	(2)
T	C
D	P

P	D
C	T
T	C
D	P
P	T
C	D

Acum, să amestecăm în stil american, așa cum am explicat mai devreme, și să fim atenți la primele patru cărți. Dacă acestea provin din același pachet, este evident că va conține cele patru semne. Dacă, de exemplu, trei provin din pachetul (1) și una din pachetul (2), vom avea treflă, tobă și pica din primul pachet, și vom avea și cupă, dar din al doilea pachet. Dacă cele patru cărți din pachetul de sus, atunci când le amestecăm, provin două dintr-un pachet și două din celălalt, vom avea întotdeauna cele patru semne: treflă și tobă, din primul, și cupă și pică, din al doilea. Ca ultimă posibilitate, dacă din pachetul (1) provine o singură carte, aceasta va fi de treflă, iar restul de trei vor fi cupă, pică și tobă, respectiv cele trei semne prezente în al doilea pachet în partea de sus. Analizând caz după caz, iată posibilitățile

Dar asta nu este tot. Să presupunem că acest lucru se întâmplă: amestecând se ia o carte din pachetul (1) și trei cărți din pachetul (2). Dat fiind că am luat deja aceste patru cărți și am constatat că acestea includ efectiv cele patru semne, acum trebuie să ne concentrăm pe cele care urmează. Aranjamentul va fi cel pe care îl vedeți mai jos (repet, după ce am eliminat cele patru cărți deja văzute):

(1) (2)

To
P

C	Tr
Tr	C
To	P
P	To
c	Tr

Dovedim că se repetă o situație similară celei de dinainte. Adică, putem spune că este exact la fel, dar defazat cu o unitate: secvențele, în loc să fie TrToPCTrToPCTrTo ... și CPToTrCP-ToTrC »., sunt acum ToPCTrToPCTrToP... și TrCPToTrCPToTrC...

Am descris principiul lui Gilbreath aplicat jocurilor de cărți. Dacă ne oprim să luăm în considerare diferiți pași, vom vedea că este menținută o ordine parțială a cărților. Și nu ne miră faptul că Norman Gilbreath a obținut acest rezultat de „cartomagie” matematică, întrucât, ca matematician, a lucrat la analiza sistemelor informatice pentru compania RÂND, o organizație de cercetare non-profit care, conform celor menționate pe site-ul oficial, are misiunea de a „ajuta la îmbunătățirea în luarea deciziilor, ajutând comunitățile din întreaga lume să fie mai sigure, mai prospere și ajutându-le să fie mereu sănătoase” Un obiectiv lăudabil, care amintește vag de un Big Brother care ne urmărește.

În orice caz, Norman Gilbreath se bucură de recunoaștere în ambele lumi, cea a magiei și cea a matematicii. Iar pasiunea sa pentru jocuri, puzzle-uri și descoperiri recreative a fost foarte utilă, deoarece cele două zone s-au încrucișat adesea și s-au fertilizat reciproc: în 1958, Gilbreath se juca cu un șervețel de hârtie și a scris pe el, la rând, primele numere prime. Pe a doua linie a scris diferențele dintre numerele de pe linia anterioară și așa mai departe. Configurația finală a fost următoarea:

2. 3. 5, 7, 11,13,17,19,23, 29,31...

1. 2. 2. 4, 2,4, 2. 4. 6, 2...

1,0, 2. 2, 2, 2,2. 2. 4...

1,2,0, 0, 0, 0,0. 2...

1,2,0, 0, 0, 0,2...

1,2,0, 0, 0, 2...

1,2,0, 0,2...

1,2,0, 2,,

1, 2, 2...

1. 0...

1...

După ce s-a jucat puțin cu numerele și a observat rezultatul, Gilbreath și-a elaborat ipoteza: cu excepția primului rând, toate numerele din prima coloană sunt unu. În exemplul anterior vedem că acest lucru se aplică primelor zece rânduri, iar doi dintre studenții lui Gilbreath au verificat că această proprietate apare și pentru primele 64 419 rânduri ale șirului. Această ipoteză, deși purta numele de Norman Gilbreath, fusese deja avansată de François Proth în 1877 într-o lucrare publicată în revista *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, nu ca teorie, ci ca fapt dovedit (deși dovada a fost greșită). Până în prezent, nu există dovezi valabile care să susțină acest fenomen magic. În 1993, Andrew Odlyzko a reușit să-și demonstreze valabilitatea pentru toate numerele prime mai mici de 10 000 000 000 000 și aceasta a dus la luarea în considerare a 346 065 536 839 de rânduri ale șirului. În ciuda acestui fapt, atâta timp cât nu există dovezi oficiale într-un sens sau altul, ipoteza rămâne deschisă.

Jocul lui Fitch Cheney

Să ne imaginăm această scenă: magicianul îl cheamă pe

asistent pe scenă și cere colaborarea unui voluntar din partea publicului. Asistentul îi cere spectatorului să aleagă cinci cărți din pachet, cele pe care le dorește. Odată ce acest lucru este făcut, asistentul magicianului lasă patru neacoperite și una cu fața în jos. Magicianul intră, privește spectatorul în ochi, îi cere să se concentreze pe cartea cu fața în jos și, dintr-odată, spune o carte. Apoi, le cere să întoarcă cartea și să o arate publicului... Este exact cartea menționată de el.

Sună incredibil, ca tot ceea ce vedem într-un spectacol de magie, dar asta ne bucură. Există multe versiuni ale acestui joc, una simplă și altele mai complexe și merită analizate îndeaproape. Jocul în cauză este o sursă de exemple pentru profesorii de matematică și probabil că va fi întotdeauna: de fapt, dacă îl analizăm, constatăm că reunește multe elemente diferite. Dar să începem vorbind despre originile sale. Colm Mulcahy, într-un articol publicat în *Math Horizons*, scrie că jocul a apărut pentru prima dată în cartea *Math Miracles*, a lui Wallace Lee și este atribuită lui Fitch Cheney, un profesor de matematică care a inventat acest truc pentru a face magie prin linia telefonică.

Să vedem despre ce este jocul, începând cu cea mai simplă versiune. Să presupunem că avem un pachet de poker normal de 52 de cărți. După cum probabil ați înțeles, trucul este să folosiți un cod secret pentru a indica a cincea carte luând în considerare pe celelalte patru. Poate că acest joc nu este ideal pentru iluzioniști, dar pentru matematicieni este un paradis, deoarece trebuie stabilit un cod valid indiferent de cărțile alese de spectator.

În spectacolul imaginat anterior, asistentul magicianului i-a cerut spectatorului să ia cinci cărți, dar asistentul a decis care dintre cărți să fie lăsate cu fața în jos. Deoarece există cinci cărți, dar există doar patru semne diferite în pachet,

cel puțin două cărți trebuie să aibă același semn, iar una dintre ele va fi cea care se va ascunde. Pe de altă parte, dacă ne gândim la cărțile ordonate ciclic de la cea secretă către rege, va exista întotdeauna o modalitate prin care aceste două cărți să fie poziționate la o distanță mai mică sau egală cu 6, între cele care au același semn. De exemplu, 4 este la o distanță de 3 de as, iar 9 este la o distanță de 6 de 3, dar 3 este la o distanță de 5 de valet. Acest fapt este util pentru stabilirea unui cod. Cartea pe care o vom lăsa ascunsă va fi cea care se află la o anumită distanță, mai mică sau egală cu 6, de cealaltă carte cu același semn.

Așadar, prima carte pe care asistentul o arată magicianului indică semnul cărții acoperite și comunică, de asemenea, faptul că, sigur, cartea se află la mai puțin de 6 din pachetul descoperit. Singurul lucru de făcut este să fiți de acord cu privire la modul de a indica numerele de la 1 la 6 folosind cele trei cărți disponibile. Nu este atât de dificil: cele trei cărți trebuie aranjate în conformitate cu o ordine lexicografică, luând în considerare semnele în ordine (pică, cupă, treflă și tobă) și apoi luând în considerare valoarea cărții. Dacă definim aceste cărți ca 1 (scăzut), 2 [intermediar] și 3 (înalt], la momentul plasării lor pe masa vom avea șase aranjări posibile (schimbul de poziție al celor trei elemente). Poziția ocupată de schimbul corespunzător [după ordinea lexicografică stabilită anterior) va indica distanța cărții acoperite față de prima carte deschisă. Schimburile, în ordine, ar fi următoarele: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Să intrăm în detalii cu un exemplu: să ne imaginăm că spectatorul a ales cărțile următoare: 2P, IOTr, IOTo, JP și 9C.

- Primul lucru de remarcat sunt cele două cărți de pică: 2P și JP. Una dintre ele va fi acoperită, iar cealaltă va fi prima carte arătată. Deoarece JP este la 9 poziții distanță de 2P, nu ne

interesează să o acoperim. În schimb, vom acoperi 2P arătând | P ca primă carte.

- Evaluăm distanța dintre 2P și 1P Această distanță este 4 [pentru a ajunge de la o carte la alta se urmează mental secvența: QP – KP – AP-2P),
- Celelalte cărți rămân de verificat, întrebându-ne care ar fi ordinea indicată de primul dintre schimburi: 9C, IOTr, IOTo (în acest caz este ușor: toate cupele sunt „mai mici* decât treflele, iar acestea, la rândul lor, sunt „mai mici¹ decât tobele).
- După aceea, va trebui să arătăm cărțile în urma schimbului de poziție numărul patru, care este IOTr, IOTo, 9C, pentru a indica faptul că trebuie adunate 4 unități la prima carte.
- Acum magicianul trebuie doar să facă suma: $JP + 4 = 2P$ Iată, este gata!

Acest joc pare puțin dificil, dar chiar nu este. Trebuie doar să exersați calcularea schimburilor de poziții. Dacă vreți să exersați, s-ar putea să fiți loviți de îndoieli precum: ce se întâmplă dacă se repetă mai mult de un semn în primele cinci cărți? Sau: ce se întâmplă dacă există trei sau mai multe cărți cu același semn? Nicio problemă: în acest caz, chiar mai bine, pentru că în acest fel avem o marjă mai

RAYMOND SMULLYAN

Rayrrond Merrill Srrullyan (19'9-20'7) a fost un personaj poliedric: a fost iluzionist, matematician, umorist, pianist, filosof ... Dar mai ales a fost o persoană plină de vitalitate, cotate cu o sensibilitate specială și care iubea să privească cerul, ce fapt era pasionat de astronomie. Când era încă foarte tânăr, nu știa dacă să se cecice lumii muzicale sau lumii matematicii.

Srrullyan a studiat matematica, ca și autodidact pentru că nu îi plăceau orele pe care le frecventa la cursurile sale. În același timp,

continua să cânte la pian și a început să inventeze primele sale probleme de șah la doar șaisprezece ani. Aceasta a fost o altă pasiune pe care a avut-o în comun cu Martin Gardner: șah, magie, matematică și lumea din *Alice în Țara Minunilor*.

mare pentru a alege ce carte să acoperim. Trebuie să acoperim întotdeauna cartea care facilitează calculele. De exemplu, primul și al șaselea schimb de poziție sunt identificate imediat, în timp ce la celelalte patru trebuie să ne gândim puțin mai mult la asta.

Să luăm un alt exemplu. Ținând cont de ceea ce spun, am luat pachetul, l-am amestecat și acum aleg cinci cărți, care sunt QP, QC, JC, 9P și JTr. Decizia este clară: voi acoperi QC pentru că este la o distanță de 1 de JC. Acum trebuie doar să aranjez cărțile rămase în mod corect pentru a da informațiile care corespund primului dintre schimburi, adică: 9P, QP, JTr.

Și mai dificil

Acum să abordăm partea jocului, care place celor „obsedați”: s-ar putea face cu un pachet de 124 de cărți, dacă ar exista, dar codul ar fi mult mai complex. Putem numerota cărțile de la 0 la 123 și să găsim un algoritm astfel încât, având în vedere cinci cărți oarecare, să putem codifica o carte folosind informațiile oferite de celelalte. Acest lucru,

Problemele cu șahul ale lui Srrullyan erau originale pentru că scopul lor era să aibă o reveni: se cere descoperirea modalității prin care s-a ajuns la o anumită situație. Ce asemenea, îmbunătățește problemele într-un șir conductor, ceea ce le face și mai atrăgătoare. Sunt cunoscute și cărțile lui despre această chestiune de logică: de exemplu, *Care este titlul acestei cărți? sau Alice în Țara Ghicitorilor* (ambele au fost traduse

în italiană).

Acest personaj special trăia cu ajutorul magiei și al pianului pentru a-și plăti studiile de matematică, chiar dacă a preferat să se instruiască pe cont propriu. De fapt, publica articole de cercetare fără să aibă titlu. În cele din urmă, Universitatea din Chicago i-a recunoscut licența *ad honorem* în Matematică în ciuda faptului că nu obținuse în mod oficial toate creditele. Un frumos „truc” de magicieni: și-a adjudecat catedra unui curs pe care îl preda ca și cum l-ar fi urmat.

În limbajul tocmai explicat, este echivalent cu codificarea oricărui număr între 0 și 123 în raport cu celelalte patru numere. Puteți reuși folosind aritmetica modulară, așa cum este descris în articolul „The Best Card Trick”, al lui Michael Kleber, publicat în *Mathematical Intelligence*. Poate că nu este cel mai bun joc de cărți, dar cum articolul a avut un mare succes și i-a ajutat pe Shai Simon și Tara Holm să organizeze un scurt curs de matematică discretă pentru copii. Poate că va fi pentru ei începutul unei lungi cariere ca magicieni matematici celebri precum Perși Diaconis sau Norman Gilbreath.

Secvențele lui De Bruijn

Ne amintim de sfatul *de a rezerva cel mai bun număr pentru marea finală*, astfel încât spectatorii să poată pleca acasă cu sentimentul că au fost martorii unui spectacol extraordinar. Iluzionistul nostru, în ultimul său număr, transmite un pachet de cărți publicului, prinse cu un elastic, cere mai multor spectatori să taie pachetul și să-l închidă cu elasticul, apoi să-l dea unui vecin. Trecherile pot fi diferite. La un moment dat, iluzionistul nostru spune stop și îi cere persoanei care are pachetul în mână să îl taie din nou și să

distribuie primele cinci cărți ale pachetului între el și 4 persoane din apropiere. Magicianul îi urmărește, apoi anunță că începe să le perceapă gândurile. Brusc, el spune că bănuiește că cineva are o carte roșie, iar cei cinci spectatori îi confirmă. Așa că îi invită pe cei cu cartea roșie să facă un pas în față și să se concentreze pe valoare. Magicianul este mereu concentrat pe mintea lor, apoi scrie gândurile pe care le-a surprins pe o foaie de hârtie și anunță ce cărți au. Ovația publicului. Nemulțumit de puterea mentală de care a dat dovadă, iluzionistul este capabil să știe ce cărți aveau în mână spectatorii care au cărți de pică.

Grozav, nu-i așa? Ei bine, după cum vedeți, cu matematica te poți juca destul. Chiar dacă, în acest caz, matematica ce trebuie cunoscută este mai degrabă complexă și se referă la un anumit tip de secvențe speciale, *secvențele lui De Bruijn*. Vom afla cum ne pot fi de folos în joc. În acest moment, imaginați-vă că magicianul interpretează numărul pe scenă și bucurați-vă de spectacol.

O secvență a lui De Bruijn de ordine n pe literele $\{a, \dots, k\}$ este o secvență ciclică de elemente kn , unde fiecare grup posibil (ordonat) de litere k apare numai o dată și o singură dată în secvență. De exemplu, 0011 este o secvență a lui De Bruijn de ordinul 2 pentru litere $\{0,1\}$. Într-adevăr, grupurile de două „litere” pe care le putem forma sunt 00, 01, 11, 10. Și în secvența pe care am definit-o, fiecare dintre ele apare o singură dată:

0011 0011 0011 0011

(în cele din urmă, trebuie să ne amintim că avem în vedere o secvență ciclică: ultimul element la dreapta este 1, următorul ar fi un 0; deoarece secvența se termină, se începe din nou de la stânga.)

O posibilă secvență a lui De Bruijn de ordinul 3 pe $\{0,1\}$ este 10001110. De fapt, începând de la stânga la dreapta (revenind pentru a lua numere de la stânga când avem nevoie), grupurile de trei simboluri sunt: 100, 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, care corespund exact celor opt grupe de trei elemente care pot fi formate cu $\{0,1\}$ (variații a două elemente luate din trei în trei).

Să ne întoarcem la jocul de magie descris la început și să vedem cum iluzionistul folosește matematica pentru a „ghici” cărțile fiecărui participant. Primul lucru de reținut este că pachetul folosit este incomplet, de fapt este un pachet de 32 de cărți, iar 32 este exact numărul de grupuri de cinci elemente care se pot forma începând de la simbolurile $\{0,1\}$ (rețineți că $2^5 = 32$). Probabil ați ghicit că iluzionistul nostru a folosit o secvență a lui De Bruijn de ordinul 5. Și într-adevăr chiar așa este. În acest scop, să luăm în considerare secvența 00000111110111001100010110101001, la care vom reveni mai târziu (dacă doriți, puteți observa că, de fapt conține o singură dată toate grupurile posibile de cinci simboluri). În acest moment, să profităm de această secvență și să ordonăm semnele din pachet după culori: roșul în cod va fi 0, iar negrul va fi 1, așadar rămânem cu secvența: RRRRRNNNNNRNNRRNNRRRRNRNNRRN.

Să revenim la scenă: vedem iluzionistul trecând pachetul pe care l-a comandat în acest mod: 8To, ITo, 3To, 7To, 7C, 7P, 6P, 5P, 3P, 7Tr, 6C, 4P, 1P, 3Tr, 6To, 4C, 8P, ITr, 2To, 5To, 3C, 6Tr, 5C, 2P, 5Tr, 2C, 4Tr, IC, 2Tr, 4To, 8C, 8Tr. Această ordine este compatibilă cu secvența lui De Bruijn văzută anterior; așadar, cunoscând pozițiile cărților roșii între cele cinci cărți alese de spectatori, vom ști exact despre care parte a secvenței este vorba. Magicianul i-a întrebat pe spectatori, discret, care dintre ei avea în mână

cărți de cupă. Să ne imaginăm că al doilea și al treilea spun că au cărți de cupă. Prin urmare, secvența este NRRNN, iar cartea primului spectator, de pică, este a

paisprezecea din pachet (după ordinea în care le-am ordonat la început). Atunci când iluzionistul se preface că își ia notițe în carnețel, el caută de fapt această secvență (pe care a scris-o în carnețel) și vede că prima carte este 3 de treflă, deci următoarele sunt 6 de toabă, 4 de cupă, 8 de pică și as de treflă. Trebuie să încerci iar și iar, dar rezultatul este garantat.

Asta nu e tot. Ordinea în care magicianul aranjase pachetul nu este întâmplătoare: să luăm o succesiune oarecare de cinci cărți și, pentru a fixa ideile, luăm în considerare același caz ca de mai înainte: NRRN N. Dacă transformăm din nou culorile în numere, vom avea secvența 10011. Așa cum am indicat mai înainte, identificăm roșu cu 0 și negru cu 1, iar pentru coerență potrivim mai întâi: 00 = toabă, 01 = cupă, 10 = treflă, 11 = pică. Cele trei cifre rămase ne vor spune valoarea cărții, care poate fi gândită și în sistem binar, dacă este mai simplă: 001 = 1 = as, 010 = 2, 011 = 3, 100 = 4, 101 = 5, 110 = 6, 111 = 7, 000 = 8. Vom alege primele două numere pentru a identifica semnul și ultimele trei pentru valoarea primei cărți din secvență. În felul acesta, efectiv, 10011 ar corespunde semnului 10 și valorii 011, adică ar fi 3 de treflă. Iluzionistul ar putea „percepe” grupul de cărți următor aruncând o privire în carnețelul său și să vadă și următoarele patru cărți. Și aici numărul s-ar putea termina.

Dar să presupunem că mate-magicianul nostru nu este mulțumit și dorește să execute numărul fără să folosească „trucuri iluzioniste”. Pentru aceasta este necesar să înțelegem cum a fost construită secvența lui De Bruijn cu care au fost puse în ordine cărțile. Deoarece pot decide următorul grup de cinci simboluri plecând de la ceea ce am deja, pot deduce și care grup de cinci simboluri vine după 10011. Din fericire, este posibil să deducem acest lucru.

Există mai mulți algoritmi care permit generarea secvențelor lui De Bruijn într-un mod repetitiv, dar ceea ce vom vedea acum este destul de simplu (a fost publicat în august 2015 de Joe Sawada, Aaron Williams și Dennis Wong). Pornind de la grupul $abcde$, unde fiecare dintre litere reprezintă 0 sau 1, grupul următoarei secvențe va fi următorul: $bcdex$ (rețineți că primele patru simboluri ale noului grup sunt aceleași cu ultimele patru din cel precedent] și ar fi necesar doar să se determine cine este x în funcție de valorile anterioare. Ceea ce sugerează acești autori este să luăm $x = a$, când $bcdel$ nu este valoarea minimă dintre toate rotațiile posibile ale grupului, și $x = a$, când $bcdel$ este valoarea minimă dintre toate rotațiile posibile ale grupului.

Greu? Nu excesiv... în plus, merită să înțelegem jocul, ca și matematica care îl guvernează. Să luăm un exemplu. Lucrăm cu grupul 10011 și vrem să știm care este următorul. Conform celor tocmai explicate, să eliminăm primul număr (în acest caz, 1) și să ne concentrăm doar pe 00111. Să ne întrebăm dacă este cea mai mică dintre toate posibilitățile de rotație (care sunt 00111, 01110, 11100, 11001, 10011]. Deoarece această valoare este minimă, numărul care urmează să fie inclus în grupul următor trebuie să fie opusul celui pe care l-am eliminat, adică 00110. Dacă ne amintim codificarea semnelor simbolurilor, cartea va avea ca semn 00 = tobă, iar ca valoare 110 = 6, adică știm că este 6 de tobă.

Pentru a face puțină practică, să calculăm acest grup.

- Eliminăm prima cifra a grupului (care este 0). Ne rămâne 0110.
- Adăugăm 1 la final. Rezultă 01101.
- Verificăm dacă se dovedește a fi minim pentru toate rotațiile posibile. În acest caz nu, pentru că 01011 este mai mic.

- Dat fiind că acest număr nu este minim, trebuie să adăugăm la sfârșit același număr pe care l-am eliminat: 0.
- În acest moment, următorul grup este 01100.
- Semnul cărților va fi 01 = cupă, iar valoarea lui va fi 100 = 4.

Secvența lui De Bruijn, pe lângă faptul că este interesantă în sine și utilă pentru realizarea unor jocuri de succes precum acesta, este acum folosită în diverse domenii. Una dintre acestea, mereu de natură

S. BRENT MORRIS

S. Brent Morris a fost pasionat de magie de la o vârstă fragedă și făcea spectacole ca iluzionist în timp ce stucia la universitate. Din 1975 a lucrat pentru guvernul Statelor Unite ca matematician.

În plus, este singura persoană care a scris o teză de doctorat despre amestecarea cărților, intitulată *Permutations by Cutting and Shuffling: A Generalization to Q Dimensions*. Această lucrare a fost urmată de două brevete și de cartea *Magic Tricks, Card Shuffling and Dynamic Computer Memories*, în care simulează funcționarea memoriei unui computer folosind amestecuri de cărți. Matematica din această carte este destul de avansată, dar experiența sa de iluzionist face să fie plăcut să găsești soluții chiar și la cele mai dificile probleme.

ludică, este programarea jocurilor de șah. Dat fiind că o tablă de șah cuprinde 64 de pătrate, este ușor să le identificăm fiecare dintre ele cu un număr de la 0 la 63 și să folosim o secvență De Bruijn de 6 biți (grupuri de 6 numere binare) pentru a le reprezenta. Succesiunea este utilă și

pentru secvențierea ADN-ului, pe baza acestei premise: un lanț lung de ADN poate fi rupt în elemente mai mici, adică mai ușor de analizat și ordonat în secvențe. Odată prelucrate datele, piesele sunt repuse împreună, ca într-un puzzle, ținând cont de faptul că subșirurile se suprapun.

De asemenea, întâlnim secvențele lui De Bruijn și în sistemele criptografice și în științele neurologice, care arată numeroase analogii: o funcție criptografică *hash* transformă date de diferite lungimi într-o variabilă de lungime fixă (de exemplu, pentru a obține un cod de probă, precum IBAN, exemplu pe care l-am propus deja la începutul cărții). Pentru fiecare mesaj există o singură funcție *hash* validă, deci este posibilă detectarea modificărilor în mesaj dacă acesta nu coincide cu *hash*-ul respectiv. Creierul este capabil să transforme percepțiile noastre într-un *hash* reprezentat pe un anumit grup de neuroni, într-un context experimental, secvențele lui De Bruijn sunt folosite ca un „atac criptografic” de încălcare a funcției *hash* a creierului, iar acest lucru face posibilă abordarea acestei funcții *hash* și investigarea modului în care funcționează creierul

Capitolul 5

Matematică, magie și arte înrudite

Pariuri de salon

Printre fanii magiei, mulți preferă ghicitorile. În unele privințe, magicianul ar trebui să aibă pregătit un „catalog de ciudățenii” și, revenind la originile iluzionismului, vedem că magia își face prima apariție în saloanele burgheziei, expusă ca fizică un exercițiu practicat în scopuri ludice. Deși acesta nu este obiectivul principal al magiei actuale, iluzioniștii arată întotdeauna un anumit interes pentru puzzle-uri și pentru faptele curioase și surprinzătoare. Într-o întâlnire *Gathering for Gardoernu* a fost menționată întâmplător: în principal suntem noi, matematicienii, iluzioniștii și pasionați! de enigme cei care participăm. Jocurile magice necesită multă ingeniozitate, la fel ca unele puzzle-uri sau probleme de matematică având scopuri ludice.

În *Magic and Showmanship*, Hennings Nelms abordează teoria iluzionismului vorbind despre iluzii ca despre enigme:

„O iluzie creează interes pentru că magicianul îi dă sens încercând să demonstreze o putere extraordinară. Un truc nu are altă

semnificație decât aceea de a propune un puzzle care provoacă publicul să-l rezolve”.

Așa se întâmplă într-un spectacol de iluzionism, deși soluția ghicitoarei nu este întotdeauna simplă. Poate că cel mai surprinzător și chiar atrăgător lucru despre lumea magiei, văzut din interior, este ingeniozitatea pe care se bazează multe jocuri.

Prima provocare: separarea dopurilor

Există jocuri de magie care necesită o mare dexteritate, în timp ce altele sunt simple și funcționează tocmai datorită simplității lor. Alteori, puzzle-urile urmăresc să câștige complicitatea spectatorului. De exemplu, la un spectacol de magie la care a participat un public restrâns, Juan Tamariz a propus, la începutul spectacolului, un puzzle foarte simplu de făcut, cu două dopuri de plută. Trebuie să puneți unul dintre cele două dopuri sub articulația degetului mare a mâinii drepte, iar celălalt sub articulația degetului mare a mâinii stângi; luați dopul din mâna dreaptă cu degetul mare și cel arătător de la stânga și, în același timp, dopul din mâna stângă cu degetul mare și arătătorul mâinii drepte.



Figura 26. Este posibilă eliberarea

în figură se văd degetele încrucișate. Puzzle-ul constă în eliberarea dopurilor în mod magic și cu eleganță, prin rotirea încheieturii o singură dată. Vom reveni la acest truc mai târziu, dacă din întâmplare cineva va vrea să încerce. Acum trebuie să vă rog să citiți cu atenție condițiile expuse în problemă și să aflați trucurile: ceea ce se vede în figură se face de obicei într-un mod

special.

A doua provocare: construiți hiperhârtia

Alte enigme care uimesc magicienii și mirenii și pe care primii le folosesc și ca preambul sau umplură pentru spectacole» se referă la geometria obiectelor pe care le folosim în fiecare zi. Una dintre acestea constă în construirea așa-numitei *hiperhârtii*, o figură imposibilă.

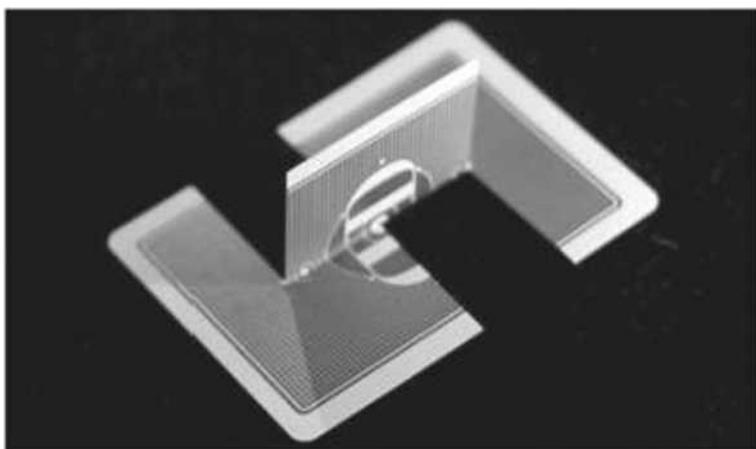


Figura 27.

După cum vedem, toate aceste jocuri sunt realizate folosind obiecte din viața de zi cu zi; nu sunt materiale truate, iar asta face provocarea și mai interesantă pentru spectator, care crede că este familiarizat cu aceste obiecte și nu se așteaptă la nimic ciudat, chiar dacă nu-și va putea explica ceea ce se întâmplă. De exemplu, iluzioniștii aleg adesea monedele, care necesită o mare dexteritate și viclenie. Chiar dacă avem mereu câteva în buzunar, nu prea le cunoaștem în profunzime.

A treia provocare: cap sau pajură?

Să facem un alt pariu, folosind două monede de 1 euro. Punem pariu că este posibil să se rotească una în jurul celeilalte, astfel încât rămâne întotdeauna în contact când se rotește de-a lungul marginii, fără a o lăsa să alunece. Care va fi poziția finală a monedei? Va sfârși prin a se întoarce, cu portretul lui Mozart în jos, sau va rămâne în

poziția în care se afla? Nimeni nu rezistă acestui pariu și toată lumea este uimită de rezultat.



Figura 28.

Cu monede putem propune și jocuri de inteligență. Să luăm un exemplu: pentru aceasta, avem nevoie de zece monede și putem muta trei pentru a schimba orientarea în triunghi.

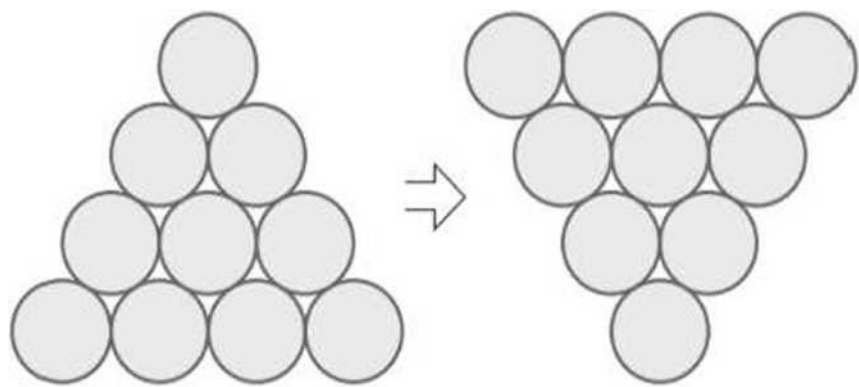


Figura 29.

Și iată-ne la ultimul exemplu de jocuri cu monede. Pentru asta este nevoie de doi jucători și de douăzeci de monede. Dacă „magicianul” este unul dintre jucători, victoria este asigurată; de fapt, să presupunem că știe strategia. La rândul său, fiecare dintre jucători poate lua una, două sau trei monede. Câștigă cel care reușește să ia ultima monedă. Încercați să faceți acest lucru gândindu-vă care ar trebui să fie strategia. Mai târziu vom vedea cum iese.

Soluții

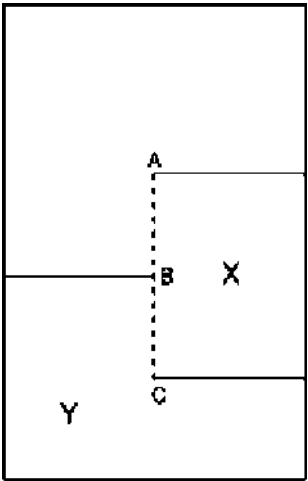
Să trecem la soluții, mergând în ordine.

PROVOCAREA 1

În primul rând, trebuie să rezolvăm jocul cu dopuri. Dopurile sunt prinse cu degetele mari, așa cum este descris mai sus, dar degetele trebuie plasate în alt mod: degetul mare drept este plasat la baza dopului care se ține cu mâna stângă, iar degetul stâng la baza celui din mâna dreaptă. Acum mâna este întoarsă astfel încât cele două degete arătătoare să ajungă în partea de sus a dopurilor. Se sprijină și, apoi, doar îți retragi mâinile. Simplu, nu-î așa? Important este să creezi tensiunea potrivită și apoi să faci vraja; de exemplu, ridicând dopurile de mai multe ori în mod greșit, astfel încât ceilalți vor imita acest gest și nu vor căuta alte cat. După care, atunci când dopurile sunt eliberate, toata lumea vă va cere să o faceți din nou. Depinde de dvs. dacă arătați trucul sau nu, dar amin- tiți-vă ca, dacă publicul rămâne în îndoială, efectul va fi și mai puternic.

PROVOCAREA 2

Hiperbărtia este o iluzie destul de surprinzătoare. Multe iluzii pot fi construite doar folosind foi de hârtie, iar unele rămân un secret pentru câțiva. Ca și alte numere care se încadrează în matematică și magie, și acesta a fost ilustrat de Martin Gardner. Ideea constă în a lua un carton dreptunghiular și a face trei tăieturi, așa cum se vede în figură. Apoi trebuie să îndoiți bucata X astfel încât să rămână perpendiculară pe restul hârtiei și să rotiți partea Y la 180 de grade,



Figura

folosind BC ca axă. Rezultatul obținut va fi figura pe care intenționai să o construiești.

PROVOCAREA 3

Să trecem la monede. Primul joc este o petrecere distractivă a timpului liber, dar nu există niciun truc dedesubt. Aparent, faptul că moneda rămâne în aceeași poziție pare a fi împotriva intuiției noastre și credem că se va răsturna. Moneda face de fapt două mișcări: una în raport cu centrul său de rotație și cealaltă în jurul centrului celeilalte monede. Un alt element care ne poate ajuta să înțelegem fenomenul este observarea curbei care descrie un punct al monedei: o *epicicloidă*.

Figura 31.

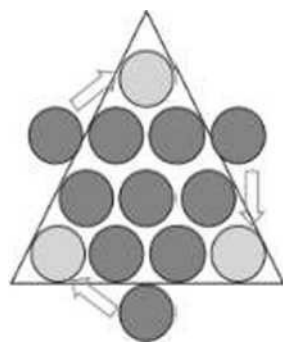


PROVOCAREA 4

Pentru a inversa triunghiul mutând doar trei monede, trebuie să mutăm vârfurile așa cum se arată în figura alăturată.

Provocarea finală

în cele din urmă, să abordăm jocul celor douăzeci de monede, care presupune să lăsăm mereu multipli de patru pe masă. Întrucât rivalul nostru poate scoate una, două sau trei



monede, vom scoate întotdeauna câte Figura 32. avem nevoie pentru a ajunge la patru, în comparație cu cele luate de la el: dacă ia una, noi vom scoate trei, două el și două noi, trei el și una noi. Din moment ce fiecare jucător poate scoate o monedă la fiecare tură, cel mult trei, dacă mai sunt multipli de patru pe masă, cel de-al doilea jucător câștigă neapărat.

Distrații cu fizica și cu chimia

Am spus că magia s-a folosit întotdeauna de progresele științei, mai ales că multe chestiuni științifice sunt misterioase pentru majoritatea oamenilor, așa că pot părea magie. Acesta este motivul pentru care atât de mulți dintre noi folosesc magia pentru a explica știința. Și nu facem decât să aplicăm o serie de idei care uneori pot ajuta la crearea magiei. Joseph Pinetti, recunoscut ca cel mai faimos magician al timpului său, a publicat o carte de magie intitulată *Amusements physiques*. Tradiția este mereu vie și adesea, în cărțile de magie, sunt abordate chestiuni științifice curioase.

Pentru primul dintre experimentele magice veți avea nevoie de niște cartofi destul de mari și de paie normale. Scopul este de a putea face o gaură în cartof cu un pai. Cel mai probabil, încercând din impuls și fără să cunoști trucul, vei ajunge să îndoi paiele fără să strici cartoful. Metoda corectă constă în a-1 ține ridicat cu cele patru degete în față și cu degetul mare în spate. Paiul trebuie manevrat prin acoperirea capătului superior cu degetul mare. Continuând, prindeți ferm cartoful și, în același timp, dați-i o lovitură pe verticală puternică cu paiul. Lovind cartoful lângă margini va fi mult mai simplu să-l traversați decât să țintiți chiar în mijloc. Și astfel efectul este și mai surprinzător.

Succesul numărului depinde de aerul din interiorul

paiului: aco- perindu-1 cu degetul mare, aerul se comprimă dând consistență paiului, iar acest lucru îl împiedică să se îndoiaie atunci când încercați să găuriți cartoful. Fără a acoperi capătul superior, aerul va ieși din paiul care, folosit pentru a lovi cartoful, se va îndoi. Este o distracție foarte simplă. Trucul este... să nu dezvăluiți trucul sau, cel puțin, nu imediat; lăsați publicul în neîncredere cât mai mult posibil.

Să luăm în considerare un alt joc interesant, pentru care trebuie să umpleți o sticlă de plastic cu orez și apoi să introduceți un creion în gâtul sticlei. Orezul rămâne astfel prins încât, ridicând creionul și ridicând mâna, reușiți să ridicați totul împreună: sticla și conținutul acesteia. Scoaterea creionului din orez este simplă – doar răsușiți-1 ușor.

Boabele de orez sunt tari, dar ricoșează. Poate că nu la prima încercare, dar după introducerea creionului de câteva ori, boabele vor tinde să se compacteze, lăsând puține spații libere. Forța generată de introducerea creionului va fi împărțită uniform între toate boabele, care vor continua să exercite presiune asupra creionului și a pereților sticlei. Răsucind creionul, reușim să eliminăm această presiune. Muiți iluzioniști realizează acest joc prezentându-1 ca și cum ar fi fachiri: folosesc un recipient cu un cuțit, în loc de sticlă și creion, adăugând o notă de tensiune spectacolului.

Iată o altă mare provocare, constând în a face să plutească „în picioare” șapte dopuri de plută într-o farfurie adâncă plină cu apă (sau, mai bine zis, într-un lighean]. Înainte de a încerca, citiți instrucțiunile până la capăt. Din nou, ideea este de a uda mai întâi dopurile de plută și de a le scufunda pe toate în același timp: acestea vor rămâne unite, datorită tensiunii superficiale a apei, suficient pentru a rezista și a pluti pe verticală.

În ceea ce privește tensiunea superficială a apei, există numeroase exemple celebre de demonstrații științifice cu care să provocați fizica în fiecare zi, chiar și acasă. De exemplu, puteți paria câte monede veți reuși să le faceți să stea într-un pahar cu apă. În primul rând, paharul se umple până la refuz cu apă; deși funcționează și cu mai puțină apă, este bine să umpleți paharul: provocarea este să

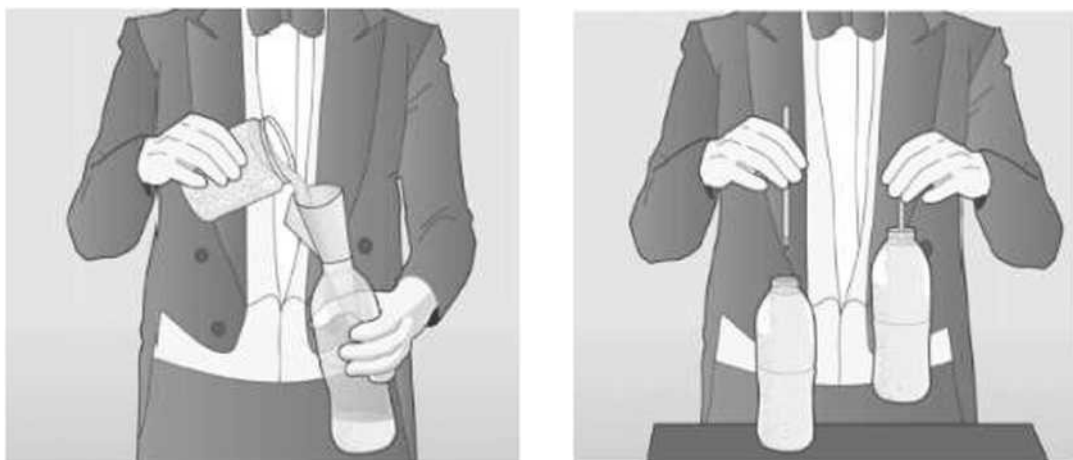


Figura 33. Rid icați o sticla cu un

introduceți multe monede fără a lăsa apa să curgă. Veți fi uimiți de cantitatea de monede care vor putea intra. Nu îndrăznesc să spun un număr aleatoriu, personal am reușit să introduc în pahar numeroase monede plus două cutii de agrafe, fără probleme. Veți vedea că apa se revarsă de pe margine, formând o lunetă, dar fără a ieși. Dacă doriți să încercați, este foarte simplu; doar umpleți până la margine și începeți să introduceți monede. Singurul lucru important este să le introduceți una câte una.

Un alt joc de magie fizică pe care l-am experimentat, și pe care unii magicieni îl includ în repertoriul lor, este cunoscut sub numele de *antigravitație*, un „experiment” în care tensiunea superficială revine în joc. Spectatorul va vedea cum reușim să ținem o sticlă plină cu apă cu capul în jos fără a o răsturna și, în același timp, vom putea introduce scobitori făcându-le să urce. Bineînțeles: dacă nu iese apa, sticla trebuie să aibă capac, dar dacă punem capac nu vom mai putea introduce scobitorile, nu? Soluția este un amestec al celor două: sticla este închisă, dar cu un „dop” perforat în

mijloc. Ca diametru al găurii, o jumătate de centimetru este suficient; încercați. Eu pregătesc un dop de plastic, care se folosea la școală pentru trasare, înainte de sosirea computerelor și a proiectoarelor. Tai un cerc de mărimea gâtului sticlei și îi fac gaura pe care voi băga scobitori. Cu răbdare, reușești să-l fixezi la sticlă. O altă soluție simplă este folosirea foliei alimentare transparente, care creează un anumit suspans: va cădea sau nu? Și de ce putem introduce scobitorile fără a lăsa apa să iasă? Depinde întotdeauna de tensiunea superficială. Ne putem imagina ce se întâmplă în detaliu: o picătură (care se formează tocmai datorită tensiunii superficiale) obstrucționează gaura și nu lasă să treacă cele mai mici picături.

Abandonăm tensiunea superficială și ne gândim la o altă provocare: distribuim ace de cusut în rândul publicului și rugăm spectatorii să le înfigă pe o țintă de plută, aruncându-le, de exemplu, de la o distanță de doi metri. Distanța nu va fi întotdeauna aceeași și va depinde de acele pe care le aveți. Sunteți gata? Dacă încercați să aruncați acele direct, este complicat, dar există un mic truc care îi va lăsa pe toți cu gura căscată: introduceți un fir de aproximativ 4 centimetri în ace și lăsați-l să gliseze prin gaură, astfel încât să lăsați 2 centimetri de fir pe fiecare parte. Firul va stabiliza acul în timpul aruncării și vă va permite să îl înfigeți cu ușurință în țintă.

Matematica origami

În lecțiile de iluzionism se studiază adesea și unele „arte colaterale”, care nu sunt chiar magie, dar nici nu aparțin altor domenii ale spectacolului (cum ar fi iluziile optice și umbrele chinezești menționate în capitolul al doilea). Una dintre artele pe care iluzioniștii le iubesc foarte mult este

cea a plierii hârtiei sau origami. În mod curios, mulți matematicieni sunt și mari fani ai acestei arte, unde se regăsește multă știință: plierea ne permite să învățăm concepte legate de

BOB HUMMER

Robert „Bob” Hummer (1906-' 981} a fost un iluzionist care a inventat jocuri minunate bazate pe matematică; dar nu numai că era capabil să facă performanță în aceste jocuri, ci era și foarte bun la cărți. Modul lui ce a crea magie era neobișnuit: nu era primul lui job, dar îi permitea să se întrețină singur și o făcea atunci când avea nevoie de bani.

Hummer a locuit lângă Chicago și și-a prezentat spectacolele acolo. El a fost probabil unul dintre magicienii care l-au influențat pe Martin Gardner în timpul opririi sale în acel oraș, pentru că jocurile Hummer sunt cunoscute, în principal, prin intermediul lui Gardner.

Numerele lui nu sunt cele obișnuite și uneori sunt numite „Jocul celor trei cărți“, „Jocul celor patru cărți” sau „Jocul celor zece cărți” Primul este un tip de joc matematic jucat cu mâinile, care are avantajul, spre deosebire de multe alte jocuri, de a putea fi repetat de mai multe ori în fața aceluiași public. Cu cât o faci de mai multe ori, cu atât efectul este mai mare. Jocul cu patru cărți, numit *Bâby Hummer*, poate fi jucat în fața unui public numeros (prin distribuirea de cărți între asistenți), astfel încât toți participanții să poată experimenta în mod direct magia. Este vorba despre un joc bazat pe matematică și, din același motiv, orice persoană îl poate face. Ideea este foarte bună și încercăm să nu cezvăluim cheia matematică.

C persoană specială care ne-a lăsat o magie la fel de specială.

simetrie și invers: astăzi, multe dintre figurile origami sunt

desenate pe computer, care calculează modul în care trebuie îndoită hârtia pentru a crea opere de artă autentice. După aceea, artistul trebuie să dobândească îndemânarea necesară pentru a îndoi cu precizie hârtia și pentru a construi figura într-un mod verosimil.

S-au scris multe cărți despre origami; unele oferă modele simple, altele se ocupă exclusiv de matematica origami. Ele sunt pregătitoare - pentru a demonstra că suma unghiurilor unui triunghi este de 180 de grade - și le putem folosi pentru a construi poligoane sau poliedre prin îndoirea unei foi de hârtie. În cele din urmă, ele ajută la explicarea unor teoreme importante, cum ar fi cea a lui Pitagora.

În iluzionism, origami apare frecvent; de exemplu, clasică floare care iese dintr-o hârtie și devine prin magie un trandafir, sau în cursul unor numere mai neobișnuite: o pasăre de hârtie transformată într-un adevărat porumbel care zboară. Chiar și origami are legătura cu cărțile din pachet; în acest sens, ilustratoarea de figuri origami Meenakshi Mukerji a creat simbolurile celor patru semne ale pachetului de poker pornind de la o simplă coală de hârtie. Pentru pică și treflă foaia este albă pe o parte și neagră pe cealaltă, pentru cupă și tobă una dintre laturi este roșie. Nu sunt modele ușor de reprodus pentru un începător, dar dacă ai răbdare vei reuși cu siguranță.

Origami poate fi realizat dintr-o singură coală de hârtie sau urmând tehnica de *origami modular*. În acest caz, sunt create unități de bază, modulele, pentru a fi asamblate împreună pentru a crea figurile pe care intenționați să le realizați. Din punct de vedere strict matematic, origami modular vă permite să vorbiți despre fețe, muchii și vârfuri și să dați instrucțiuni de asamblare folosind aceiași termeni.

Deși nu sunt un expert în origami, am jucat adesea un joc

plecând de la o figură geometrică: un cuboctaedru. Această figură se obține dintr-un cub prin secționarea acestuia la vârfuri. Figura are paisprezece fețe, dintre care opt sunt triunghiuri echilaterale (unul pentru fiecare vârf], iar celelalte șase sunt pătrate, adică ceea ce rămâne din tăietură. Suntem la finalul spectacolului, iar iluzionistul nostru anunță că va transforma o sferă în fluturi. Publicul

este neîncrezător, apoi magicianul își ia sfera aruncând-o în sus și, în timp ce cade, o lovește, făcând să zboare prin aer fluturi de hârtie colorați.

După cum este descris, numărul se poate termina aici. Dar, dacă doriți, puteți adăuga confetti și dublați efectul. Fluturii nu sunt reali, ci module de origami care, atunci când sunt unite, formează cuboctaedrul.

Ideea acestei figuri i se datorează lui Kenneth Kawamura, care a conceput douăsprezece module identice în formă de fluturi. Pentru a simplifica asamblarea, trebuie să aveți patru foi de culori diferite și să faceți trei module pentru fiecare culoare.

Forma pentru fluture se pliază astfel:

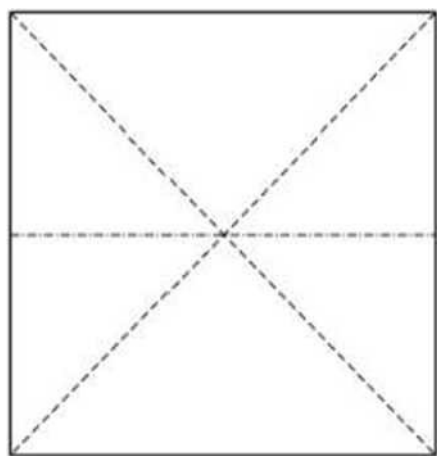
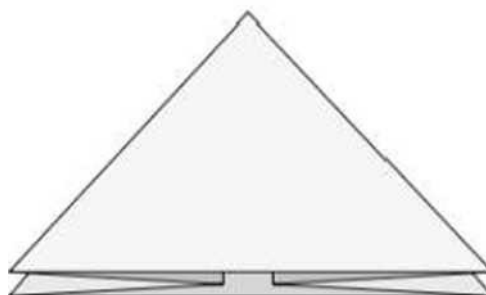


Figura 34.



După pliere îl vom deschide ușor; de fapt, nu ne interesează că rămâne total plat. Pentru a forma cubul, vom așeza pe masă una dintre formele cu baza dreptunghiulară. Apoi, vom lua o formă de o altă culoare și o vom așeza astfel încât să iasă puțin în afara celeilalte. Vom lua o a treia formă, de altă culoare, plasând-o decalat față de cea anterioară. Ultima formă (și aceasta tot de altă culoare) va ieși ușor în afara celei anterioare și o vom introduce sub prima, ca atunci

când închidem o cutie cu barete. Procedând astfel, vom forma un pătrat în care se disting patru triunghiuri dreptunghiulare isoscele de culori diferite.



Figura

Următorul pas este să adăugăm confetti, cu care vom atinge două scopuri: unul final de efect și, lucru care nu este mai puțin important, să adăugăm greutatea utilă hârtiei pentru a ne face structura mai stabilă. Să construim acum etajul doi. Alegem un vârf și punem pe el una dintre forme, cu o culoare diferită de cea a vârfului, alternând mereu în interior și în exterior. Facem apoi același lucru cu celelalte trei vârfuri, amintindu-ne alternanța interior-exterior și ordinea culorilor aleasă la început.

În sfârșit, etajul trei. Luăm una dintre fețe și ne uităm la culorile care sunt prezente. Vom pune o formă care are culoarea lipsă (în acest moment, pe fiecare față, ar trebui să se vadă trei culori diferite]. Pe fața următoare, luăm culoarea care lipsește și o adăugăm, alternând culorile. Continuăm așa (având grijă să nu rupem structura] până ce am introdus ultima formă. Asta este ceea ce face poliedrul stabil. Odată finalizat, trebuie să îl atingeți, să îl întoarceți și să îl rotiți astfel încât fiecare formă să revină spontan la locul său (din acest motiv, la început s-a recomandat să deschideți puțin formele, astfel încât să fie mai ușor de îmbinat].

Figura 36.

Totul este gata pentru truc. Veți fi surprinși de consistența cuboctaedrului atunci când toate piesele sunt potrivite, dar, pe de altă parte, și de ușurința cu care se poate rupe. În plus, formele amintesc de forma fluturelui: finalul perfect pentru a saluta publicul din sală.

Flexagonele și caleidociclurile

Un alt element comun la jumătatea distanței dintre magie și matematică sunt flexagonele. La fel ca multe alte lucruri din lumea matematicii și a magiei, și acestea au devenit cunoscute prin rubrica de jocuri matematice deținută de Martin Gardner în *Scientific American*: chiar datorită articolelor despre flexagone a obținut de la revistă sarcina de a scrie rubrica fixă de matematică atât de urmărită. Gardner s-a familiarizat cu aceste structuri geometrice datorită unui alt pasionat de magie matematică, Royal Vale Heath. Era nebun după enigme și i-a arătat lui Gardner că, îndoind (flexând) o foaie de hârtie, se vedeau fețe care anterior erau ascunse. Gardner a arătat interes pentru figură atunci când a aflat că a fost proiectată de niște studenți de la Princeton. Se pare că cea mai importantă contribuție a venit de la Arthur Stone, care venise în Statele Unite din Anglia și avea caiete de un alt format, așa că îi rămâneau mereu bucăți de hârtie. A început să le îndoiaie și a obținut structuri surprinzătoare. În grupul de studenți de

la Princeton care au început să studieze flexagonele și proprietățile acestora a existat, de asemenea, o persoană curioasă, care ar fi primit ulterior un Premiu Nobel pentru Fizică: Richard Feynman. Suntem în 1956; dar, în 2014, Vi Hart a obținut un succes incredibil realizând videoclipuri, care în curând au devenit virale, în care descria cum să construiască flexagonele, pe care le-a manipulat cu mare pricepere. Flexagonele au fost, de asemenea, utilizate pentru generalizarea structurilor numerice, cum ar fi pătratele magice. Odată cu introducerea flexagonelor, complexitatea crește, dar la fel crește și distracția. Alți iluzioniști l-au folosit pentru a face spectacolele mai vivace.

Unul dintre cele mai simple flexagone este hexaplexagonul. Acest nume indică faptul că, aparent, este un hexagon (de unde

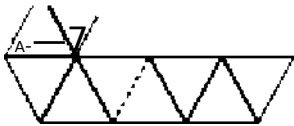


Figura „hex”), chiar dacă are trei fețe diferite.

Vom începe de la o bandă cu zece triunghiuri echilaterale, așa cum se arată în figură. Vom reprezenta cu diferite tonuri spatele hârtiei, pentru a distinge îndoiturile de făcut

Prima îndoitură pe care o vom face va fi separarea celor trei triunghiuri din dreapta (cum se vede în figură), iar celelalte șapte vor rămâne dedesubt. Trebuie să obțineți o formă similară cu aceasta:

Figura 33. Prima îndoitura.



Acum vom îndoi a doua oară, aducând cele șapte triunghiuri care se află acum în partea superioară spre spatele figurii și suprapunând această parte pe care o îndoim peste triunghiul pe care l-am avut inițial îndreaptă.

Figura 39.

În cele din urmă, vom pune niște lipici pe spatele ultimului triunghi și îl vom îndoi sub primul triunghi. Odată ce lipiciul s-a uscat, Hexagonul nostru este gata.

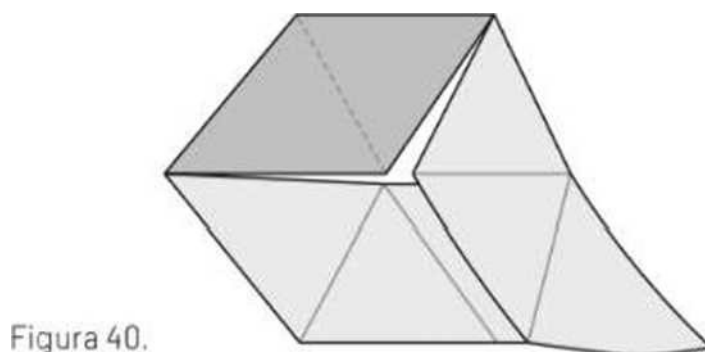


Figura 40.

Flexagonele pot fi folosite în spectacolele de magie pentru predic- ții, cum ar fi dezvăluirea unei cărți... scriind-o pe fețele acoperite. Este un truc cu efecte uimitoare și arată ca ceva magic în sine.

Flexagonele sunt figuri plate, dar au frați mai mari, caleidociclu- rile, figuri tridimensionale care pot fi răsucite. Numele lor provine din trei cuvinte grecești: *kalli*, care înseamnă „frumusețe”, *âidos*, care înseamnă „formă” și *kuklos*, care înseamnă „a reveni la punctul de plecare”. Au fost utilizate pe scară largă în publicitate. Un caleidociclu este un inel care conține un număr par de tetraedre conectate prin muchii. Cel mai simplu caleidociclu este ce) format din opt tetraedre. Ele se pot întoarce continuu spre interior sau spre exterior pentru a arăta diferite fețe ale tetraedrului. În magie sunt folosite în diferite moduri, pentru a spune o poveste curioasă sau a face o revelație: este un element în plus, util în școala de magie matematică.

Pentru a construi caleidociclul este indicat să reproduceți

Puneți puțin lipici pe triunghiurile A și B, apoi puneți vârful A sub triunghiul de pe partea opusă a lanțului. Puneți vârful B sub opusul său, astfel încât să se formeze tetraedre cu o latură comună. Rețineți că, pe măsură ce sunteți mai preciși în potrivirea unui triunghi cu celălalt, cu atât rezultatul este mai bun. Continuați să faceți același lucru (potriviți vârful inferior al triunghiului corespunzător laturii opuse] pentru a forma încă șase tetraedre folosind triunghiurile C și D și apoi triunghiurile E și F. Puneți lipiciul pe C și H și acoperiți cu triunghiurile rămase. În acest fel veți finaliza caleidociclul.

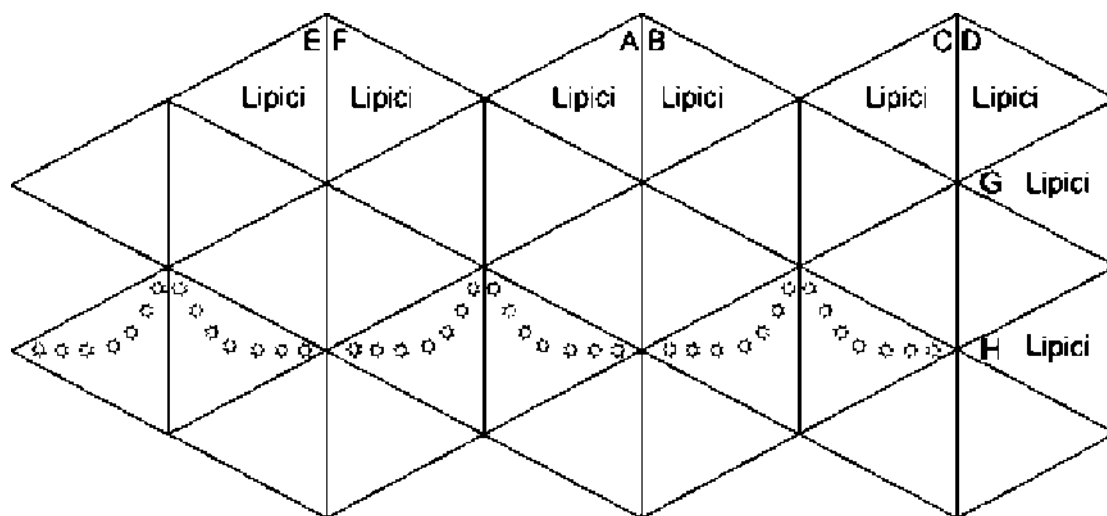


Figura 4L
Globof lexia

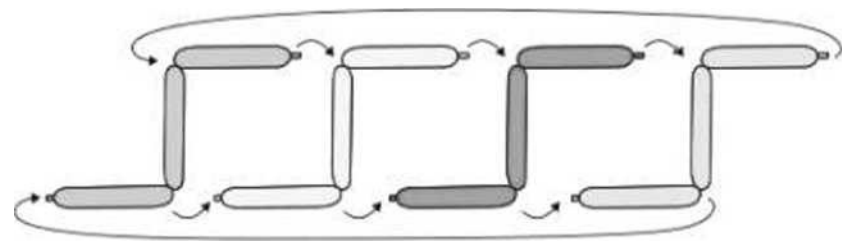
Și globoflexia este, de asemenea, considerată o artă înrudită cu magia. Poate ați văzut iluzioniști care, între un număr și altul, fac figuri cu baloane, uneori pentru a aduce un omagiu

vreunui spectator. Dar uneori baloanele fac parte din jocul magic. Vi Hart a fost cea care a făcut globoflexia matematică populară la nivel internațional. Nu a fost prima persoană care a făcut poliedre folosind baloane: chiar și magicianul și matematicianul Francisco González are un laborator de „globometrie” sau, mai bine zis, un laborator de geometrie cu baloane. Belén Garrido, o adevărată expertă în matematică origami, a reprezentat macromolecule și poliesteri folosind doar baloane, iar Caroline Ainslie, care în 2015 a intrat în Cartea Recordurilor Guinness pentru organizarea orei de matematică cu cei mai mulți elevi din lume, se distrează să facă tetraedre gigantice din baloane.

Prin globoflexie este posibil să abordăm problemele teoriei graficelor, să aprofundăm drumurile hamiltoniene și să creăm ghicitori și puzzle-uri ingenioase.

O metodă simplă de a realiza orice poliedru cu baloane este să folosești baloane pentru a construi muchii. Problema cu acest sistem este că obținem poliedre nu foarte solide, deoarece muchiile ajung să se îndoie și poliedrele ajung să nu mai apară ca atare. Ideea genială a lui Vi Hart și a lui Eric Demaine a fost să îndoie baloanele, așa cum fac artiștii globoflexiei, nu neapărat matematică, crescând astfel presiunea din interior și evitând să le facă să se îndoie. De exemplu, pentru a avea cele douăsprezece muchii ale unui cub, putem îndoii patru baloane în trei părți fiecare și apoi le asamblăm:

Figura 42. Cele douăsprezece muchii ale



VI HART

Oficial, Victoria Hart a primit o educație muzicală, dar ce la o vârstă foarte fragecă s-a familiarizat cu matematica. Este suficient să spunem că sculptorul matematic și expert în geometrie computațională George Hart este cunoscut în lumea matematicii recreaționale ca fiind „părintele lui Vi Hart”. Din 2012, Vi Hart și-a deschis canalul pe YouTube, începând să publice o serie de videoclipuri care au devenit virale. Cu acestea, a ajutat la răspândirea flexagonelor, distrând copiii din întreaga lume cu priceperea sa.

Fiind martoră încă de tânără la întâlniri individuale unce vedea reu- nincu-se matematicieni, artiști, pasionați ce ghicitori, iluzioniști, experți în oricami și alte persoane dedicate explorării granițelor dintre artă și știință, ea și-a făcut un loc în această lume, contribuind cu creativitatea ei inovatoare la îmbogățirea domeniului matematicii recreaționale. Ea a fost capabilă să construiască poliedre folosind mere pe diferite planuri și să explice geometria și teoria graiurilor cu ajutorul baloanelor. În acest sens, a publicat mai multe articole împreună cu Erik Demaine, o altă personalitate din domeniul matematicii recreative (care nu exclude matematica „serioasă”).

În 2016, a participat la un proiect de producție în Realitate Virtuală pornind de la lucrări ale lui Moebius și proiecții stereografice. Este oricum vorba tot oespre magie, chiar dacă este de alt fel. \u trebuie să uităm că cinematograful a făcut primii pași cu proiecțiile făcute în spectacolele iluzionismului, precum cele ale lui Georges IVâliăs.

Aceeși idee poate fi aplicată și altor poliedre. Nu există multe referințe în acest sens, de fapt sunt noțiuni relativ recente. Articolul lui Vi Hart „Mathematical Balloon Twisting for Education” ilustrează o serie de figuri care pot fi

compuse folosind această tehnică. Realizarea poliedrelor cu baloane este un stimulent și ne va ajuta să ne îmbunătățim spectacolele de magie matematică.

Și acum, că avem toate elementele utile disponibile, să înceapă spectacolul!

ANEXE

LECTURI RECOMANDATE

Diaconis, Persi și Graham. *Magical Mathematics: The Mathematical Ideas That Animate Great Magic Tricks*. Princeton University Press, 2012.

Atât Diaconis, cât și Graham sunt matematicieni de prim rang, cu evoluții deosebite: Diaconis a călătorit prin lume împreună cu un magician, iar Graham a lucrat într-un circ. Această carte combină matematica modernă cu jocurile de magie. Arotâ cum să aplicăm matematica în lumea reală și ajută la înțelegerea modului în care cineva ne poate amăgi. Uneori, temele sunt complexe, dar modul de expunere simplu al autorilor, împreună cu selecția atentă a jocurilor, face textul ușor de citit.

Mulcahy, Colm. *Mathematical Card Magic: Fifty-Two New Effects*. CRC Press, Boca Raton (Florida), 2012.

Această carte explică magia cărților, bazată pe concepte matematice destul de avansate. Numerele ilustrate în carte sunt originale, concepute de Colm Mulcahy. Unele dintre acestea au apărut ca articole în rubrica Mathematical Association of America, dar în carte se găsesc descrieri mult mai detaliate și sunt explicate relațiile cu matematica. Cartea ar trebui citită cu cărțile de joc în mână; este nevoie de timp, dar lectura nu va fi mai puțin plăcută și distractivă.

Carlo Rossetti. *Magia cărților*. Hoepli, Milano, 2007.

Carlo Rossetti, amiral ai Marinei Regale și ulterior ministru și membru al Ligii Națiunilor, cu o personalitate fascinantă și interese poliedrice, este autorul acestui manual publicat pentru prima dată în 1935 și retipărit continuu. Citirea lui este necesară chiar și numai pentru interes istoric. Conținutul său este descris în detaliu în subtitlu: „Tratat complet de magie cu cărți, pentru folosirea oamenilor educați, atât profesioniști, cât și amatori ai artei magiei”.

Gardner, Martin. *Misterele magiei matematice*. Sansoni, Firenze, 1985.

Aceasta este prima carte dedicată în întregime magiei matematice. Scrisă în 1956, continuă să fie un punct de

referință fundamental și, în unele privințe, este textul care i-a inspirat până astăzi pe tați iubitorii de magie matematică. Există multe jocuri bazate pe principii matematice, chiar dacă nu este întotdeauna indicat nivelul de pregătire necesar sau modul în care această disciplină afectează dezvoltarea jocului. Oricum, selecția este fantastică și acoperă mai multe ramuri ale întregii magii matematice.

GLOSAR

Conceptele de bază ale magiei matematice în sinteză.

Anamorfoză: imagine deformată anterior, pe care creierul nostru o poate recunoaște atunci când ne aflăm într-un punct privilegiat sau când folosim o oglindă specială (curbată, cilindrică, piramidală ...).

Aritmetică modulară: ramură a aritmeticii bazată pe congruența modulo n . Se spune că două numere întregi sunt congruente modulo n (cu n diferit de zero) dacă diferența lor este multiplu de n . Când adunăm la două numere modul un al treilea, rezultatul acestei „sume” este restul împărțirii dintre suma (normală) și cel de-al treilea număr. În ceas, se folosește aritmetica modulo 12 pentru a reprezenta orele, iar acest lucru implică faptul că cele 16 sunt echivalente cu 4. De exemplu, $11 + 9 = 8$ (modulo 12). Când e ora 11 și trec 9 ore, este ora 8.

Cod de detectare a unei erori: informație redundantă care apare în multe contexte pentru a verifica dacă o dată este corectă, făcând unele operațiuni asupra componentelor sale. În mod normal, codurile de detectare a erorilor se găsesc în codurile EAN și QR, în numerele de serie ale bancnotelor, în conturile bancare, în actele de identitate. Folosind aceste informații redundante se poate face un joc de magie.

Iluzie: ceva care este sugerat de simțuri, dar care nu este complet real. Iluziile optice sunt foarte frecvente, dar există și alte tipuri de iluzii auditive sau tactile. Abilitatea magicienilor constă în a crea această iluzie prin realizarea unor isprăvi incredibile. În matematică, datorită naturii

sale raționale, în loc de iluzii găsim paradoxuri.

Amestec în stil american: împărțirea pachetului de cărți în două pachete mai mult sau mai puțin egale care sunt amestecate între ele.

Important este că ordinea relativă a cărților care provin din același pachet este menținută (singurul lucru care se întâmplă cu acest amestec este că toate cărțile se amestecă doar între ele, nimic mai mult). Deci unele proprietăți ale pachetului original sunt păstrate. Amestec tip far: prevede ca pachetul de cărți să fie împărțit în două jumătăți cu același număr de cărți și ca acestea să fie suprapuse una câte una, luând o carte dintr-o jumătate și continuând cu cartea provenită din cealaltă jumătate. Se fac amestecuri far externe sau interne, în funcție de prima carte din pachet care provine din jumătatea superioară sau inferioară a pachetului original. Cu 8 amestecuri externe far, pachetul revine la ordinea inițială.

Nod: nodurile sunt familiare tuturor (toți ne legăm pantofii), dar poate că este mai puțin cunoscut faptul că sunt studiate de matematică. Teoria matematică a nodurilor, care a început să fie o ramură importantă a topologiei începând cu anii 1920, își găsește utilizare în biologie, fizică și chiar în criptografie. Clasificarea nodurilor este importantă, iar nodurile false sunt utilizate în special în iluzionism (care sunt echivalente cu nodul normal sau cu absența acestuia).

Paradox: fapt care contravine logicii. În paradoxuri se întâmplă la fel ca în jocurile de magie, adică se produc fenomene care scapă bu- nului-simț, astfel încât paradoxurile reapar adesea sub forma unor jocuri matematice și iluzioniștii înșiși le includ în spectacolele lor.

Principiul lui Gilbreath: raționament matematic care este

utilizat pe scară largă în cartomagie. Amestecând două secvențe ordonate în stil american, dar în ordine inversă, pachetul rezultat din amestec păstrează grupurile în care pachetul acesta a fost ordonat anterior. Sistem binar: sistem numeric diferit de cel utilizat în mod normal, care este cel zecimal. îl folosesc computerele, dar apare și în unele jocuri de magie. Un număr poate fi întotdeauna descompus ca sumă a puterilor de doi. De exemplu, $43 = 32 + 8 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Dacă ne concentrăm doar pe coeficienții expresiei anterioare, vom obține numărul 101011,

adică reprezentarea în sistemul binar a numărului care în zecimale se scrie 43.

Șirul lui Fibonacci: șir descris de matematicianul Leonardo din Pisa (Fibonacci), în cartea *Liber Abaci*. Calculează numărul de perechi de iepuri pe care le-ai avea după un an, plecând de la o pereche, în anumite condiții. Din punct de vedere matematic, fiecare număr din șir se obține prin adunarea celor două anterioare: 0, 1,1, 2, 3, 5,8,13,21, 34,...

• FERNAN DO* * FERMAN DO*’FE RNAN DO*♦FE RNAN DO+* FERNANDO*’FERNANDO**FERNANDO*
-BLASCO_*, -BLASCO_*, -BLASCO_*, -BLASCO_’, -BLASCO’, -BLASCO_*, -BLASCO*,
,MAGIA!_Y-,MAGIA!_Y-,MAIA!_Y-,MAI 1A!_Y-jMAI1A!_Y-,MAI1A!_Y-,MAIIA!_Y-,
MATEMATICAMATEMATICAMATMAT1CAMATM\$ATICAMATM\$ATICAMATM\$ATICAMATM\$ATICAM
• FERNAN DO* • FERNANDO* ’ FENAINDO* •ENAINDO+ •FENA%NDO+ ’FENAÎNDO* • FENAtNDO* -
ELASCO_*, -ELASCO_’, -BLSCVO_-, -BLSCVO_’, -BLSCVO_*, -BLSCVO_’, -BLSCVO_’,
,MAGIA!_Y-,MAGIA
!_Y-,MAIA!_Y-jMAIXA!_Y-jMAIXAIY-,MAIXA’Y-jMAIXAÎ Y-, MATEMAT ICAMATEMATICAMATMAT
1CAMATMFAT1CAMATMFATIC/XMATMFATICAMATMFATICAM
• FEREAM DO* • FERNANDO*’FENACNDO* • FENACNDO+ ’FENACNDO+ • FENACNDO+ *
FENACNDO+ -ELASCO_*, -BLASCO_’, -ELSC#O_-, -ELSC#O_’, -BLSC#O_’, -BLSC#O_*, -BLSC#O_*, iMAGIA!_Y-|
MAGIA!_Y-|MAIA!_Y-,MAA!_Y-,MAA2!_Y-jMAA2. !_Y-,MAA2. !_Y~i
MATEMATICAMATEMATICAMATMADTICAMATADTICAMATADTkiCAMATADTkiCAMATADTkiCAM
•FERNANDO*’FERNANDO*•FENA(NDO*•FEA(8NDO+*FE(8xHDO*•FE(BxNDO**FE<8xNDO* -ELASCO_*, -
ELASCO_’, -ELASCO_*, -ELSCeO_’, -BLCe4O_*, -BLCe#O_*, -BLCe#O_*, ,MAGIA!_Y-,MAGIA 1_Y-,MAGIA!_Y-i MAIA!
_Y-jMAIA!E_Y-,MAIA!E_Y-,MAIA!E_Y-,
MATEMATICAMATEMATICAMATEMATICAMATMATICAMATM1ATICAMATM1ATICAMATM1ATICAM
• FERNAN DO* ’ FERNANDO* * FERNANDO* * FENA5NDO* * FEA5qNDO* • FEA5qNDO* * FEASqNDO*
-BLASCO_*, -BLASCO_*, -BLASCO_*, -BLSCjO_’, -BLCj/O_*, -BLC j/O_*, -BLCj/O_*, jMAGIA!_Y-iMAGIA!_Y-,MAGIA!
_Y-j MAIA!_Y-j MAIA!.MAIA’5_ Y-,MAIA!5_Y-j
MATEMATICAMATEMATICAMATEMATICAMATMATICAMATMxATICAMATMxATICAMATMxATICAM

Figura 9.